REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUREET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE MAGHNIA — المـــركز الجـامـعي – مـــغنيـــة –

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE — معهـد العلـــوم والـتـكـنـولـوجيـــا

EXTRAIT DU PROCES VERBAL DE LA REUNION DU CONSEIL SCIENTIFIQUE DE L'INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

24 Février 2022

L'an deux mille vingt deux, le vingt quatre février à 10h se sont réunis les membres du Conseil Scientifique de l'Institut des Sciences et de la Technologie dont les noms suivent:

- **M. HOUARI Ahmed :** *Président du Conseil Scientifique ST ;*
- **M. ZENASNI Hocine :** *Directeur de l'Institut des Sciences et de la Technologie ;*
- **Mme. BELARBI Halima :** *Cheffe du département d'hydraulique ;*
- **M. BELMOKHTAR Azzedine :** *Directeur-Adjoint des Etudes de l'Institut des Sciences et de la Technologie ;*
- **Mme AINSEBA Nabila :** *Directrice-Adjointe des Relations Extérieures de l'Institut des Sciences et de la Technologie;*
- **Mme. BEKRI Yamina :** *Responsable de domaine ST*
- **Mme. SARI Aouatef :** *Représentante du corps Maître de Conférences au Conseil Scientifique de l'Institut;*
- **Mme. BENMANSOUR Khadidja :** *Représentante du corps Maître de Conférences au Conseil Scientifique de l'Institut ;*
- **M. KAZI-TANI Hychem :** *Représentant du corps Maître de Conférences au Conseil Scientifique de l'Institut;*
- **Mme. GHERISSI Radia :** *Représentante du corps Maître de Conférences au Conseil Scientifique de l'Institut ;*
- **M. ZEGNOUNI Aymen :** *Représentant du corps Maître-Assistant au Conseil Scientifique de l'Institut ;*
- **M. GAOUR Imad :** *Représentant du corps Maître-Assistant au Conseil Scientifique de l'Institut ;*

Etaient absents :

- **Mme. SETTOUTI Nadéra :** *Représentante du corps Maître de Conférences au Conseil Scientifique de l'Institut (excusée);*
- **Mme. NEHARI Meriem :** *Responsable de la bibliothèque ST (excusée) ;*

معهد العلوم و التكنولوجيا
المجلس العلمي للمعهد
المركز الجامعي مغنية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUREET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE MAGHNIA — المركز الجامعي – مغنية –

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE — معهد العلوم والتكنولوجيا

Ordre du jour:

L'ordre du jour préétabli est le suivant:

1. **Validation des canevas de licences académiques et professionnelles ;**
2. **Dépôt des polycopiés pédagogiques pour expertise;**
3. **Confirmation des rapports d'expertise des polycopiés pédagogiques**
4. **Divers.**

3. Confirmation des rapports d'expertise des polycopiés pédagogiques :

Quatre (04) polycopiés pédagogiques déposés auparavant auprès du Conseil Scientifique pour expertise ont reçu tous des **rapports favorables pour leur publication**. Après examen des rapports d'expertise par le Conseil Scientifique, ce dernier a **confirmé les avis favorables accordés par les experts pour chaque polycopié expertisé.** La fiche signalétique des polycopiés en question est la suivnate :

N°	Intitulé	Spécialité	Auteur
1	**Travaux Pratiques : Traitement et Epuration des eaux**	Hydraulique Urbaine	**Dr. REKKAB Afaf**
2	**Travaux Pratiques : résistance des matériaux**	Mécanique	**Dr. FODIL Med Amine**
3	**Aménagement Hydraulique**	Hydraulique Urbaine	**Dr. REZAGUI Djihed**
4	**Mécanique du point : cours et exercices corrigés**	Physique	**Dr. SARI Aoutef**

L'ensemble des enseignants (es) ont été remerciés (es) pour leur présence et leur contribution. La séance fut levée à 12h30

Signé :

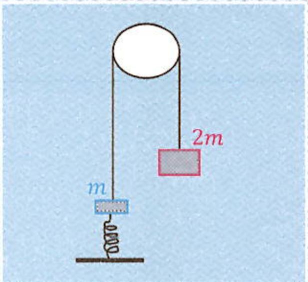
Président du Conseil Scientifique IST

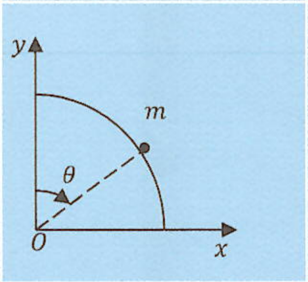
أ.د. هواري أحمد
رئيس المجلس العلمي

المجلس العلمي للمعهد
معهد العلوم و التكنولوجيا – المركز الجامعي مغنية

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Centre Universitaire de Maghnia – Tlemcen
المركز الجامعي لمغنية - تلمسان

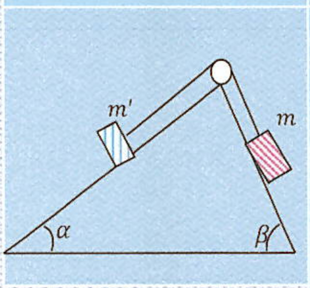
Mécanique du point matériel

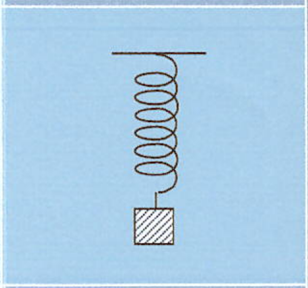


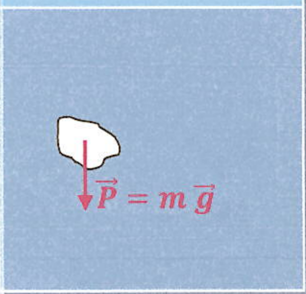


$E_P = ??$

$E_C = ??$







Cours et exercices corrigés

Pour classes préparatoires

Elaboré par : Dr. Sari Aouatef
e-mail : sari.aouatef@yahoo.fr

2021-2022

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants inscrits en première année des classes préparatoires en sciences et techniques. Son contenu correspond au programme officiel de la matière « physique 1 » enseigné en première année. Il est rédigé d'une manière simple et limpide afin de comprendre aisément et de la meilleure façon possible les détails du cours et des travaux dirigés de physique 1.

Après un vaste et ample rappel des notions fondamentales à savoir : les grandeurs, mesures et équations physiques…, la cinématique et la mécanique du point matériel sont traitées particulièrement. Aussi, des exemples réels illustrant le phénomène étudié et des applications directes sont traités afin de permettre aux étudiants une compréhension et une assimilation complète et rapide.

Le contenu de ce manuscrit s'articule autour de six chapitres.

Le premier chapitre est réservé aux rappels et notions fondamentales d'une grandeur physique, les unités utilisées et les mesures effectuées. L'analyse dimensionnelle est traitée d'une manière très large vue la nouveauté introduite dans ces fondements, ces derniers temps, et en particulier la constante quantique de Planck. Enfin on aborde l'étude des incertitudes et des erreurs commises lors d'une mesure.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux vecteurs et à toutes les opérations qu'on peut appliquer sur un champ vectoriel ; en commençant par les plus simples : la somme, le produit scalaire…jusqu'à arriver aux produits vectoriel et mixte, la dérivation, au calcul des moments et aux opérateurs appliqués sur un vecteur

Le troisième chapitre est consacré aux coordonnées spatiales et à la cinématique. Ainsi les coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques sont étudiées avec beaucoup de vigilance et de clarté. Dans le volet cinématique, on étudie différents mouvements rectiligne ou non rectiligne, uniforme ou non uniforme.

Le quatrième chapitre, quant à lui, traite le mouvement relatif, et précise l'utilité et la différence entre un repère absolu qui est immobile et autre un repère mobile dans l'espace. Les grandeurs et ingrédients propres à chaque repère sont démontrés avant qu'elles ne soient exposées. Aussi la relation entre toutes ces grandeurs est bel et bien établie et des exemples de mouvement sont abordés.

Le cinquième chapitre concerne la dynamique du point matériel. Dans ce chapitre on met le point sur des notions primordiales à savoir : les forces (de poids, de réaction, de tension, de frottements), la quantité de mouvement, le centre d'inertie, le moment d'une force, le moment cinétique …En outre, les lois fondamentales de la dynamique sont énoncées avec des illustrations. A la fin de ce chapitre, on propose un plan général et récapitulatif à suivre pour parvenir à résoudre les problèmes de la dynamique

Enfin, dans le sixième chapitre on traite le travail et l'énergie d'un point matériel. Il s'agit d'apprendre comment calculer le travail d'une force et distinguer le type de travail. Par ailleurs, les énergies cinétique, potentielle et mécanique sont présentées et les théorèmes qui s'y réfèrent sont démontrés.

A la fin de chaque chapitre, une série d'exercices est proposée avec des solutions détaillées pour permettre une meilleure assimilation. On précise que tous ces exercices ont fait l'objet de sujets d'examen et de séries de TD dans le centre universitaire de Maghnia.

Bien que l'élaboration de ce fascicule soit faite avec le plus grand soin, le contrôle que j'ai pu faire de ce travail n'est pas absolu, et il serait étonnant qu'il ne subsiste pas d'erreurs. Aussi suis-je reconnaissante d'avance aux lecteurs des remarques qu'ils voudront bien faire. A la fin, je souhaite à tous les lecteurs qu'ils assimilent le contenu de ce travail, et à tous les étudiants un parcours universitaire plein de réussite.

Table des matières

Chapitre I

Notions fondamentales

1) Introduction :

La physique est l'étude des phénomènes naturels et leurs causes, elle s'intéresse surtout à la matière inerte. Nous pouvons citer quelques exemples :

- Mouvements des corps : rotation de la terre, rotation d'un satellite autour de la terre…
- Phénomènes électriques et magnétiques : attraction de deux aimants…
- Phénomènes optiques : réfraction de la lumière…
- La radioactivité nucléaire.

Selon les phénomènes étudiés, la physique est subdivisée en branches : mécanique, électricité, magnétisme, optique,… généralement régies par des lois expérimentales ou théoriques comportant des formules. Afin de vérifier l'homogénéité, la convenance et la justesse d'une formule physique, nous utilisons l'analyse dimensionnelle. C'est un outil puissant qui permet de s'assurer de l'exactitude et de la cohérence d'une loi physique.

2) Grandeurs physiques :

On appelle grandeur physique toute propriété de la science qui peut être mesurée ou calculée donc souvent accompagnée d'une unité.

On distingue deux types de grandeurs : grandeur scalaire et grandeur vectorielle.

2.1) Grandeur scalaire :

Une grandeur dite scalaire est représentée par un nombre (intensité) et une unité.

2.2) Grandeur vectorielle :

Une grandeur dite vectorielle est caractérisée par un vecteur et une unité. Un vecteur est lui-même caractérisé par un sens et une norme.

$$\vec{V} = V\,\vec{u}$$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire de norme $\|\vec{u}\| = 1$ et V la norme du vecteur $\vec{V}$ qui représente la longueur de V.

3) Mesures physiques :

La mesure d'une grandeur physique inconnue revient à comparer cette grandeur à une autre de même nature prise comme référence. Nous pouvons classifier les mesures physiques en deux catégories : les mesures directes et les mesures indirectes.

3.1) Mesures directes : La valeur de la grandeur est obtenue en comparant le résultat de la mesure avec une grandeur de même espèce prise comme terme de référence.

Exemple : Mesurer une durée avec un chronomètre ou peser une masse avec une balance …

3.2) Mesures indirectes : la mesure de la grandeur fait appel à une formule mathématique utilisant une autre grandeur généralement plus simple.

Par exemple :

- Si l'on veut mesurer la surface d'une sphère S, on utilise la formule $S = 4\pi\, r^2$, après avoir mesurer le rayon de la sphère r.
- La mesure de l'altitude h d'un avion en utilisant la loi de la pression :

$$P(h) = P_0\, e^{-c\,h}.$$

Sachant que c est une constante connue, on mesure $P(h)$ avec un appareil attaché à l'avion, on mesure P_0 la pression au niveau de la mer et on déduit que : $h = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{P_0}{P_{(h)}}\right)$.

4) Analyse dimensionnelle :

C'est une méthode pratique qui permet de vérifier l'homogénéité d'une formule physique en décomposant les grandeurs physiques qu'elle contient en un produit de grandeurs de base telles que : la longueur, la durée…l'analyse dimensionnelle permet aussi de passer d'un système d'unités à un autre comme elle permet aussi de prédire les équations de quelques phénomènes physiques. En d'autres termes, l'analyse dimensionnelle est un outil puissant pour :

- vérifier un résultat après un raisonnement rigoureux.
- obtenir une formule après un raisonnement intuitif.
- comprendre la dépendance fonctionnelle d'une quantité par rapport aux paramètres et variables dont elle dépend.
- obtenir des formules, des expressions littérales de certaines quantités physiques.

4.1) Unité et dimension de mesure :

L'unité de mesure est un étalon nécessaire pour la mesure physique. La valeur de l'unité est connue avec une grande exactitude tels que le mètre, la seconde…

De nos jours, le système d'unités le plus utilisé est le Système International d'unités (SI) comprenant sept unités de base présentées dans la **figure 1.1**, à savoir le mètre *(m),* le kilogramme *(Kg),* la seconde *(s)*, l'ampère *(A),* la mole *(mol*), le kelvin *(K)* et le candela *(cd)*. Toutes les autres unités rattachées au SI peuvent être dérivées de ces sept unités de base. La dimension d'une grandeur physique est une combinaison des sept dimensions de bases citées dans le **tableau I.1**.

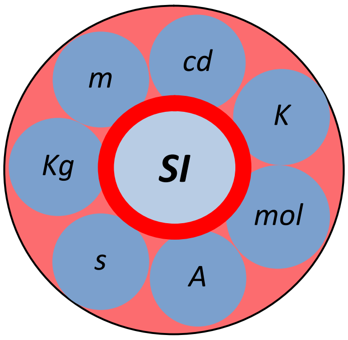


Figure I.1 : Les sept unités de bases

Grandeur	***Symbole***	***Dimension***	***Unité (S.I.)***
Longueur	L	[l] = L	Le mètre *(m)*
Masse	M	[m] = M	Le kilogramme *(Kg)*
Temps	T	[t] = T	La seconde *(s)*
Intensité du courant électrique	i	[i] = I	L'ampère *(A)*
Température	T	[T] = θ	Le kelvin *(K)*
Intensité de la lumière	j	[j]= J	La candela *(cd)*
Quantité de la matière	n	[n]= N	La mole *(mol)*

Tableau 1.1 *: Grandeurs de base, leurs symboles, dimensions et unités dans le système international (SI).*

Une grandeur physique possède une dimension si sa mesure dépend du choix d'un étalon de mesure. Par exemple :

- Un volume étant défini comme une longueur au cube, n'a pas la même dimension qu'une longueur, ce sont deux grandeurs de natures différentes. Sa mesure dépend du choix de l'étalon de la longueur.
- Un angle est sans dimension puisqu'il s'agit du rapport de deux distances, sa mesure est donc indépendante du choix de l'étalon de distance.

Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une quantité physique a une et une seule dimension ; en revanche elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différents. Par exemple, un physicien exprime une longueur en mètre, un astronome en parsec (1 parsec = 3,2 année lumière).

4.2) Définitions des unités à partir des constantes fondamentales :

Les unités fondamentales du (SI) sont définies sur la base des constantes universelles, c'est le cas par exemple de la longueur qui est développée à partir de la vitesse de la lumière (la célérité). Le kilogramme fait l'exception, car il a toujours été considéré comme étant une constante. Après la constatation en 2005 que la masse du kilogramme d'un prototype en platine varie au cours du temps, le comité international des poids et des mesures (CIPM) recommande de redéfinir le kilogramme en terme de constante fondamentale de la nature. En 2011, la Conférence générales des poids et des mesures (CGPM) convient que le kilogramme devrait être redéfini en fonction de la constante de Planck *h*.

Grandeur physique	***Symbole***	***Fixée par la constante***
Longueur	l	La vitesse de la lumière **c**= $2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m/s
Masse	m	La constante de Planck **h**= $6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ J.s
Temps	t	La fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de Césium133, $\Delta\boldsymbol{\nu}_{Cs}$= $9{,}192631770$ s^{-1}
Température	T	La constante de Boltzmann $\mathbf{K_B}$= $1{,}3806 \cdot 10^{-23}$ JK^{-1}
Intensité électrique	i	La charge de l'électron **e**= $1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C
Quantité de matière	n	Le nombre d'Avogadro $\mathbf{N_A}$= $6{,}0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Intensité de la lumière	j	L'efficacité lumineuse $\mathbf{K_{cd}}$=683 lm/W

Tableau I.2 *: Grandeurs de bases, leurs unités et constantes correspondantes.*

Exemple : Il s'agit d'exprimer le mètre en fonction de la vitesse de la lumière $\boldsymbol{c}$ et de la fréquence de césium, $\Delta\boldsymbol{\nu}_{Cs}$.

Sachant que : $c = 299792458\ m/s$

Et que : la seconde étant : $\frac{9192631770}{\Delta\nu_{Cs}}$

$$1m = \left(\frac{c}{299792458}\right)s \Rightarrow 1m = \frac{c}{299792458}\ \frac{9192631770}{\Delta\nu_{Cs}}$$

$$1m \approx 30{,}663319\,\frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}$$

4.2.1) Interprétation physique de la constante de Planck :

La constante de Planck est liée à la quantité d'énergie la plus faible que l'on puisse mesurer. Elle est utilisée notamment pour décrire la taille des quanta et pour expliquer les phénomènes de quantification qui se produisent avec les particules. Ainsi, l'énergie de particules (l'électron, par exemple) prend des valeurs multiples de valeurs fixes au lieu d'un ensemble continu de valeurs possibles ; on parle de la quantification de l'énergie. Par exemple, l'énergie d'une particule est reliée à sa fréquence par :

$$E = h\nu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Aussi, on sait que le principe de la relativité stipule que:

$$E = mc^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Avec : E est l'énergie de la particule, h la constante de Planck, ν la fréquence de l'onde électromagnétique associé à la particule, m la masse de la particule et c la célérité de la lumière.

En combinant les deux lois (1) et (2) on aboutit à :

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

4.2.2) Pourquoi la constante de Planck ?

La constante de Planck s'exprime en joule seconde $(J.s)$, en se servant de l'expression de l'énergie cinétique E_c, l'unité de la constante de Planck est facilement obtenue dans SI.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; J = Kg\, m^2 s^{-2}$$

$$\Rightarrow J\, s = Kg\, m^2 s^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Les physiciens ont choisi la constante de Planck comme base de la définition du kilogramme car $(J.s)$ n'est autre que $(kg.m^2.s^{-1})$, et que le mètre et la seconde sont précisément définis.

Connaissant la valeur de la constante de Planck, $h = 6{,}62607015.10^{-34}\, J.s$ ou $kg.m^2.s^{-1}$, il devient donc possible de définir aussi précisément le kilogramme.

$$h = 6{,}62607015\,.\,10^{-34}\;\; kg\, m^2 s^{-1} \Rightarrow \frac{h}{6{,}62607015\,.\,10^{-34}\;\; m^2 s^{-1}} = 1Kg$$

$$\Rightarrow 1kg = \left(\frac{h}{6{,}62607015\,.10^{-34}}\right)\; m^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

4.2.3) Une autre forme du kilogramme :

On vient de trouver que : $1kg = \left(\frac{h}{6{,}62607015\,.10^{-34}}\right)\; m^{-2}s$

A présent, on va exprimer $m^{-2}s$ en fonction d'autres constantes universelles, à savoir la vitesse de la lumiere c et l'inverse du temps $\Delta\nu_{Cs}$. On rappelle ici qu'une seconde correspond à la durée de $9{,}192631770\,.\,10^{9}$ oscillations d'un cesium ^{133}Cs , et que l'inverse du temps est définie c une fréquence).

L'unité de c est : $ms^{-1} \Longrightarrow$ L'unité de c^2 est : m^2s^{-2}

$$\Longrightarrow \text{L'unité de } \frac{1}{c^2} \text{ est : } m^{-2}s^{2}$$

En multipliant par $\frac{1}{T}$ qui n'est autre qu'une fréquence $\Delta\nu_{Cs}$ on trouve que :

$$\text{L'unité de } \frac{1}{c^2}\,\Delta\nu_{Cs} \text{ est : } m^{-2}s$$

Ainsi : l'équation (5) va pouvoir s'écrir comme suit :

$$1kg = \left(\frac{h}{6{,}62607015\,.\,10^{-34}}\right).\frac{[2.99792458\,.\,10^{8}]^2}{c^2}.\frac{\Delta\nu_{Cs}}{9{,}192631770\,.\,10^{9}}$$

$$1kg = 1{,}4755214\,.\,10^{40}\; \frac{h.\Delta\nu_{Cs}}{c^2}$$

4.2.4) Conséquences :

Avec la révision du système international (SI), les unités de bases ne sont plus toutes interdépendantes.

La mole étant l'unité de la quantité de matière d'une entité élémentaire spécifique (atome, molécule, ion, électron …) est redéfinie en fonction du nombre d'Avogadro N_A désormais parfaitement définie, plutôt qu'à partir d'une masse. La valeur d'une mole est définie en fixant la valeur numérique du nombre d'Avogadro N_A à une valeur exacte : $6{,}02214076\,.\,10^{23}\; entité\,.mol^{-1}$.

L'Ampère qui est l'unité du courant électrique, passe d'une définition basée sur une force (indirectement une masse) à une autre totalement indépendante, car la charge élémentaire e a désormais une valeur exacte. La valeur d'un Ampère est définie en fixant la valeur numérique de la charge élémentaire à exactement $1{,}602176634\,.\,10^{-19}\; C$, ce qui correspond à (Ampère. seconde).

Le Kelvin était défini comme $1/273{,}16$ de la température du point triple de l'eau (la température à laquelle les trois phases à savoir liquide solide et gaz cohabitent). Désormais la définition du Kelvin va changer fondamentalement et sera dépendante de celle du kilogramme via la constante de Boltzmann K_B.

La constante de Boltzmann K_B relie l'énergie d'un corps à sa température. Dans les cas simples on utilise la relation :

$$E = \frac{1}{2}\, K_B\, T \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

En fixant K_B à exactement $1{,}38064.10^{-2}\ \ J.K^{-1}$ (ou alors : $s^{-2}.m^{2}.Kg.K^{-1}$), on définit l'unité de la température qu'est le Kelvin. Le Kelvin dépendra donc du kilogramme, du mètre et de la seconde.

Remarque : *le degré Celsius n'est pas une unité SI ; il est défini par rapport au Kelvin, sa définition change donc également.*

Les définitions des autres unités (la longueur, le temps et la quantité de la lumière) restent fondamentalement les mêmes mais sont reformulées afin de les rendre plus claires et plus rigoureuses. Par exemple l'ancienne définition de la seconde disait :

La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de césium 133 à la température du zéro absolu. La définition actuelle est :

La seconde, s, est l'unité de la durée ; sa valeur est définie en fixant la valeur du nombre de périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à la température du zéro absolu à exactement 9192631770 quand elle est exprimée en s^{-1}.

Par conséquent, la mole se retrouve indépendante, et les autres unités ne dépendent plus les unes des autres de la même façon. C'était l'un des objectifs principaux. Toutes les unités du (SI) dépendent désormais d'une constante fondamentale fixée. Il n'y a plus aucun étalon physique, la précision est maximisée et sera plus stable dans le temps.

Le kilogramme est la dernière unité qui restait à redéfinir grâce aux constantes fondamentales de la physique. Maintenant c'est chose faite ; ce qui achève une page de l'histoire du système international des unités.

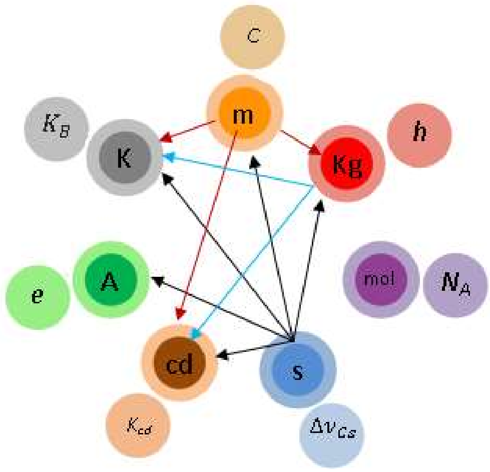


Figure I.2 : Relations entre les diverses unités de mesure

4.3) Equations aux dimensions :

4.3.1) Définition :

Une loi physique est une équation reliant plusieurs grandeurs, donc plusieurs dimensions on parle alors d'*équations aux dimensions.* Plus précisément, une grandeur qui n'appartient pas aux sept grandeurs fondamentales est appelée *grandeur dérivée,* et l'équation qui relie cette grandeur dérivée aux sept grandeurs fondamentales est nommée *équation aux dimensions.*

Les équations aux dimensions sont universelles et indépendantes des systèmes d'unités. Deux grandeurs de même nature possèdent la même dimension. Ainsi deux grandeurs de dimensions différentes ne peuvent être additionnées.

Par ailleurs, une loi physique doit aussi être homogène et cohérente ; c'est le critère sur lequel on peut s'appuyer pour vérifier la justesse d'un résultat physique. Sachant que la dimension d'une grandeur *X* est notée *[X]* n'importe quelle équation aux dimensions s'écrit sous la forme générale :

$$[X] = M^a\, L^b\, T^c\, \theta^d\, I^e\, N^f\, J^g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Où : a,b, c, d, e, f, g sont des réels (l'un ou plusieurs peuvent s'annuler)

Exemple : la masse volumique définie par : $\rho = \frac{M}{V}$

$$[\rho] = \frac{[M]}{[V]} \Longrightarrow [\rho] = ML^{-3}$$

$$\Longrightarrow [\rho] = ML^{-3}\, T^0\, \theta^0\, I^0\, N^0\, J^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

D'où :

$.a = 1,\ \ b = -3,\ \ c = 0,\ \ d = 0,\ \ e = 0,\ \ f = 0,\ \ g = 0$

4.3.2) Dimension des constantes :

On distingue deux types de constantes :

- Les constantes qui possèdent des unités dont la dimension peut être calculée d'une manière directe à l'instar de l'accélération de la pesanteur terrestre $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2} \Longrightarrow [g] = LT^{-2}$; ou encore la constante de Boltzmann : $K_B = 1{,}38\ 10^{-23}\ \frac{J}{K} \Longrightarrow [K_B] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
- Les constantes sans unités dont la dimension est égale à 1.

$[5] = 1\,,\quad \left[\frac{-1}{2}\right] = 1\ldots$

Par exemple le nombre π qui fait le lien entre le « droit » et le « courbé », entre les distances et les angles. La définition géométrique de π est associée au rapport du périmètre P d'un cercle sur son diamètre D : π = P/D. Cette définition nous montre bien que c'est un nombre sans dimension : [π] = [P]/[D] = L/L d'où : [π]= 1

4.3.3) Dimension de l'angle et de quelques fonctions spéciales :

Durant toutes les études précédentes (moyen et lycée) on a surtout utilisé les degrés, dans la vie de tous les jours on parle surtout de tours mais en mathématiques les radians ont été introduits et en particulier le nombre π. Voici la correspondance entre ces diverses unités :

$$1\ tour\ (tr)\ =\ 2\pi\ radians\ (rad)\ =\ 360\ degrés \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Le tour est facilement aperçu par notre esprit, les degrés sont utilisés dans les sciences expérimentales, quant aux radians, ils sont utilisés en théorie lorsque les calculs sont plus compliqués.

Mais pourquoi les angles sont des objets sans dimension : $[\theta] = 1$, pourtant on leur attribue des unités !

La compréhension de ce dernier point fait appel à la définition de la longueur l d'un arc d'un cercle de rayon R délimité par un angle θ qui est égal au produit du rayon par l'angle : $l = R.\theta$

Ce qui donne :

$$[l] = [R][\theta] \Longrightarrow [\theta] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{L}{L}$$

$$\Longrightarrow [\theta] = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(10)}$$

L'angle θ est alors de dimension égale à 1.

Enfin lorsque les angles sont petits et exprimés en radians, on peut utiliser les relations suivantes : $\sin\theta \ll 1 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \tan\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$

D'où : $[\sin\theta] = 1, \ [tg\,\theta] = 1, \ [\cos\theta] = 1$.

En plus d'après la formule d'Euler : $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i} \ = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$

On aboutit à :

$$[e^{\theta}] = 1, \qquad [\log\theta] = 1$$

4.3.4) Propriétés des équations aux dimensions :

Supposons que *A, B et C* sont des grandeurs physiques, nous pouvons alors résumer les propriétés des équations aux dimensions tel que :

- si $A = B + C \ \ alors\ [A] = [B] = [C]$ ………………………………… (11)
- si $A = B - C \ \ alors\ [A] = [B] = [C]$ ………………………………… (12)
- si $A = B.C \ \ alors\ [A] = [B].[C]$ ………………………………… (13)
- si $A = B/C \ \ alors\ [A] = [B]/[C]$ ………………………………… (14)
- si $A = B^x/C^y \ \ alors\ [A] = [B]^x/[C]^y$ ………………………………… (15)

4.4) Exemples et applications :

Dans le **tableau I.3**, on donne quelques exemples de grandeurs très utilisées dans le domaine des sciences et dans le cursus de l'ingénieur. On précise la formule utilisée pour le raisonnement et le développement de sa dimension et on donne son unité correspondante dans le système international (SI).

Grandeur	***Formule utilisée***	***Dimension***	***Unité (SI)***
Surface ***S***	$S = l^2$	$[S] = [l].[l]$ $= L.L$ $[S] = L^2$	m^2
Volume ***V***	$V = l^3$	$[V] = [l].[l].[l]$ $= L.L.L$ $[V] = L^3$	m^3
Masse volumique ***ρ***	$\rho = m/V$	$[\rho] = [m]/[V]$ $= M/L^3$ $[\rho] = ML^{-3}$	$Kg\ m^{-3}$
Fréquence ***f***	$f = 1/T$ T : la période	$[f] = [1]/[T]$ $= 1/T$ $[f] = T^{-1}$	s^{-1} = Hz
Vitesse linéaire ***v***	$v = d/t$	$[v] = [d]/[t]$ $= L/T$ $[v] = LT^{-1}$	$m\ s^{-1}$
Accélération linéaire ***α***	$\alpha = v/t$	$[\alpha] = [v]/[t]$ $= LT^{-1}/T$ $[\alpha] = LT^{-2}$	$m\ s^{-2}$
Vitesse angulaire ***ω***	$\omega = {}^{v}/_{r}$ Où : $\omega = \frac{tours}{temps}$	$[\omega] = [v]/[r] = T^{-1}$ Où: $[\omega] = [n.\pi.radian]/[t]$ $= T^{-1}$	s^{-1}
Force ***F***	$F = m\ a$	$[F] = [m].[a]$ $[F] = M.LT^{-2}$	$Kg\ m\ s^{-2}$ $= N$
Energie ***E***	$E_c = \frac{1}{2} m\ v^2$	$[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right] [m]\ [v]^2$ $[E_c] = 1.M.(LT^{-1})^2$ $[E] = MLT^{-2}$	$Kg\ m^2\ s^{-2}$ $= J$
Travail ***W***	$W = F\ d$	$[W] = [F][d]$ $= MLT^{-2}.L$ $[W] = ML^2T^{-2}$	$Kg\ m^2\ s^{-2}$ $= J$
Pression ***p***	$p = F/S$	$[p] = \frac{[F]}{[S]}$ $= \frac{M.LT^{-2}}{L^2}$ $[p] = ML^{-1}T^{-2}$	$Kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ = Pascal

Puissance **P**	$P = W/t$	$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$ $[P] = ML^2T^{-3}$	$Kg\, m^2\, s^{-3}$ = Watte
Charge électrique **q**	$q = i\, t$	$[q] = [i].[t]$ $[q] = I\, T$	$A\, s = C$ = Coulomb
Champ électrique **E**	$E = F/q$	$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{M.LT^{-2}}{IT}$ $[E] = M.LT^{-3}I^{-1}$	$Kg\, m\, s^{-3}A^{-1}$ $= V/M$ $= N/C$
Différence de potentiel **U**	$U = d\, E$	$[U] = [d].[E]$ $= L.M.LT^{-3}I^{-1}$ $[U] = M.L^2T^{-3}I^{-1}$	$Kg\, m^2\, s^{-3}A^{-1}$ $= V$
Résistance électrique **R**	$R = U/i$	$[R] = \frac{[U]}{[i]} = \frac{M.L^2T^{-3}I^{-1}}{I}$ $[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}$	$Kg\, m^2\, s^{-3}A^{-2}$ $= \Omega$

Tableau I.3. *Quelques grandeurs physiques, leurs dimensions et leurs unités correspondantes.*

4.5) Homogénéité des équations :

Comme on l'a déjà souligné au début de ce chapitre, il est possible de vérifier l'homogénéité d'une équation en utilisant l'équation aux dimensions. En fait, dans une équation, les dimensions des grandeurs dans ces deux membres doivent être les mêmes. On suppose que *A, B, C, D, E, F et G* sont des grandeurs physiques et x un nombre réel. L'équation reliant ces grandeurs physiques est comme suit :

$$(A + B) - C/D = (E.F)^x + G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

L'équation aux dimensions permet d'écrire :

$$[(A + B) - C/D] = [(E.F)^x + G] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Application 1 : Déterminer la dimension des deux paramètres α et β qui apparaissent dans la loi de la force F donnée par :

$$F = \alpha\, m\, v + \beta v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Sachant que m est une masse et v est une vitesse linéaire.

Solution :

La formule donnant F s'écrit sous forme d'une somme de deux termes, on utilise dans ce cas la propriété (11) des équations aux dimensions, ainsi :

$$F = \alpha\, m\, v + \beta\, v^2 \Rightarrow [F] = [\alpha\, m\, v] = [\beta v^2]$$

$$\Rightarrow [F] = [\alpha][m]\,[v] = [\beta][v]^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [F] = [\alpha][m]\,[v] \\ [F] = [\beta][v]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\alpha] = \frac{[F]}{[m]\,[v]} \\ [\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\alpha] = \frac{[F]}{[m]\,[v]} \\ [\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\alpha] = \frac{MLT^{-2}}{M.LT^{-1}} \\ [\beta] = \frac{MLT^{-2}}{(LT^{-1})^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\alpha] = T^{-1} \\ [\beta] = ML^{-1} \end{cases}$$

4.6) Prédiction d'une équation physique en utilisant l'analyse dimensionnelle :

L'analyse dimensionnelle permet de trouver l'équation physique qui gouverne le phénomène, à une constante numérique près sans dimension.

Application 2 : La vitesse d'arrivée au sol d'un objet de masse m lâché sans vitesse initiale à partir d'une hauteur h s'écrit sous la forme :

$$v = k\, h^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} \quad \text{(19)}$$

Avec k une constante sans unité. Déterminer α, β, γ.

Solution :

D'un côté, on a : $[v] = LT^{-1}$

De l'autre côté, on a : $[k\, h^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}] = [k]\,[h]^{\alpha}\,[m]^{\beta}\,[g]^{\gamma}$

$$= 1\, L^{\alpha}\, M^{\beta}\, (LT^{-2})$$

$$[v] = [k\, h^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}] \Rightarrow LT^{-1} = L^{\alpha}\, M^{\beta} (LT^{-2})^{\gamma}$$

$$\Rightarrow LT^{-1} = L^{\alpha+\gamma}\, M^{\beta}\, T^{-2\gamma}$$

Par identification : $\begin{cases} L = L^{\alpha+\gamma} \\ 1 = M^{\beta} \\ T^{-1} = T^{-2\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \gamma \\ 0 = \beta \\ -1 = -2\gamma \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = k\, h^{1/2} m^0 g^{1/2}$$

$$\Rightarrow v = k\sqrt{hg}$$

Application 3 : Une sphère immergée dans un fluide subit une force F telle que :

$$F = k\,\eta^{\alpha}\, r^{\beta}\, v^{\gamma} \ldots\ldots \quad (20)$$

Où k un coefficient numérique sans dimension, r est le rayon de la sphère et v est la vitesse relative de la sphère.

Sachant que $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, déterminer α, β, γ.

Solution :

$$F = k\,\eta^{\alpha}\, r^{\beta}\, v^{\gamma} \Rightarrow [F\,] = [k]\,[\,\eta\,]^{\alpha}\,[\,r\,]^{\beta}\,[\,v]^{\gamma}$$

$$\Rightarrow M\,L\,T^{-2} = 1\,[ML^{-1}T^{-1}]^{\alpha}\,[L]^{\beta}\,[LT^{-1}]^{\gamma}$$

$$\Rightarrow M\,L\,T^{-2} = M^{\alpha}\;L^{-\alpha+\beta+\gamma}\;T^{-\alpha-\gamma}$$

Par identification : $\begin{cases} M = M^{\alpha} \\ L = L^{-\alpha+\beta+\gamma} \\ T^{-2} = T^{-\alpha-\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha - \gamma = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = k\,\eta\, r\, v$$

5) Calcul d'incertitude :

5.1) Notion d'erreur :

La mesure d'une grandeur physique est inévitablement accompagnée d'une erreur. La vraie valeur de la grandeur est inconnue et ne peut jamais être une valeur exacte. L'erreur est définie comme étant la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte.

Les erreurs sont généralement systématiques ; elles sont dues aux problèmes que l'expérimentateur ne peut contrôler. Ces erreurs sont engendrées par des appareils défectueux ou des méthodes erronées produisant des résultats toujours plus grandes ou toujours plus petites que la valeur exacte. Il s'agit d'une erreur constante et dans un seul sens. Hormis les erreurs dues aux méthodes, les erreurs systématiques peuvent être classées en trois types :

a) Erreurs de mesure : Ces erreurs sont liées à l'imperfection des sens de l'expérimentateur ou aux conditions de la mesure.

b) Erreurs instrumentales : C'est l'imperfection des instruments qui en est la cause de ce type d'erreur. Cette erreur est habituellement déclarée par le fournisseur.

c) Erreur de lecture : Par convention on a établi que l'erreur maximale due à un instrument de mesure est égale à la moitié de la plus petite graduation de l'instrument pour les appareils analogiques. Dans le cas des appareils numériques, l'erreur est de l'ordre de grandeur du dernier chiffre affiché.

5.2) Notion d'incertitude :

L'incertitude absolue notée Δx sur une mesure est la différence ou l'écart maximum entre une valeur mesurée et une valeur exacte. Lors de la mesure effectuée sur une grandeur A, la vraie valeur x_0 étant inconnue mais peut être cernée dans un intervalle délimité par la valeur la plus probable x et par l'incertitude absolue Δx telle que :

$$x - \Delta x \ \leq x_0 \leq x + \Delta x$$

Le résultat de la mesure s'écrit alors :

$$A = x \pm \Delta x \quad \text{(suivi de l'unité de } A\text{)}$$

Lorsqu'on veut déterminer l'incertitude de mesure Δx d'une grandeur A, on effectue une série de n mesures indépendantes dans les mêmes conditions expérimentales. Si l'on désigne par b_i les valeurs numériques des mesures effectuées (avec $i = 1, 2, \dots, n$), alors la valeur moyenne de cette mesure est égale à la moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs b_i . Cette valeur moyenne est notée b et elle se calcule par :

$$b = \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

L'écart type de cette distribution Q est calculé comme suit :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \bar{b}\right)^2}$$

Finalement l'incertitude Δx est déterminée par :

$$\Delta x = \frac{Q}{\sqrt{n}}$$

5.3) Calcul des incertitudes :

Cas d'une somme algébrique :

Soit S une grandeur sous la forme :

$$S = m\,u + n\,v + p\,w \quad \text{………………………………} \quad (21)$$

Sachant que : $u,\ v,\ w$ sont des grandeurs d'incertitudes absolues $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, et que $m, n\ , p$ sont des coefficients positifs ou négatifs. Pour calculer l'incertitude sur S on fait appel à la dérivée partielle. C'est un outil mathématique très utile pour le calcl d'incertitude. Elle peut être appliquée à n'importe quelle forme de fonctions. La dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, tout en gardant les autres variables constantes.

Alors : $dS = m\,du + n\,dv + p\,dw$

$$\Delta S = |m|\,\Delta u + |n|\,\Delta v + |p|\,\Delta w \quad \text{………………} \quad (22)$$

Exemple : soit le temps $t = 2t_2 - t_1$

On donne : $t_1 = 13.15\ s,\quad t_2 = 24.86\ s,\quad \Delta t_1 = \Delta t_2 = 0.01\ s$

On calcule

$\Delta t = |2|\,\Delta t_2 + |-1|\,\Delta t_1 \Longrightarrow \Delta t = (2 * 0.01) + 0.01$

$\Longrightarrow \Delta t = 0.03\ s \Longrightarrow t = (36.57\ \pm 0.03)\ s$

Remarque **:** le nombre de chiffres significatif, se trouvant après la virgule doit être le même pour t et Δt.

Cas d'un produit ou un quotient :

Soit P une grandeur qui s'écrit sous la forme :

$$P = \frac{K u^m v^{-n}}{(w+x)^q} \quad \text{………………………………………} \quad (23)$$

Sachant que : $u, \ v, \ w, \ x$ sont des grandeurs d'incertitudes absolues $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \ \Delta x$, $m, n \ , q$ des coefficients, positifs ou négatifs et K est une constante.

Dans ce cas, on utilise la fonction logarithmique qui permet de faciliter les calculs lorsqu'il s'agit d'une fonction compliquée dépendant de plusieurs variables.

Ainsi :

$$\ln P = \ln K + \ m \ln u - n \ln v - q \ln(w + x)$$

Prenons la différentielle de $\ln P$ qui est : $d \ln P = \frac{dP}{P}$

Alors :

$$\frac{dP}{P} = \frac{dK}{K} + m \ \frac{du}{u} - n \ \frac{dv}{v} - q \frac{dw + dx}{(w + x)}$$

Puisque K est une constante, alors : $dK = 0$

On remplace les éléments différentiels par les incertitudes sur les grandeurs associées, on transforme tous les signes négatifs en signes positifs tout en utilisant les valeurs absolues des coefficients.

On obtient

$$\frac{dP}{P} = |m| \ \frac{\Delta u}{u} + |n| \ \frac{\Delta v}{v} + |q| \frac{\Delta w + \Delta x}{(w + x)}$$

Enfin :

$$dP = \left(|m| \ \frac{\Delta u}{u} + |n| \ \frac{\Delta v}{v} + |q| \frac{\Delta w + \Delta x}{(w + x)} \right) P \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (24)$$

Exemple : soit P une grandeur sous la forme :

$$P = K \frac{u^{\alpha} v^{\beta}}{(u + v)^{\gamma} \ w^{\delta}}$$

Sachant que : $u, \ v, \ w$ sont des grandeurs d'incertitudes absolues $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, $\alpha, \beta \ , \gamma, \delta$ des coefficients et K est une constante.

$$\ln P = \ln K + \ \alpha \ln u + \beta \ln v - \gamma \ln(u + v) + \delta \ln w$$

$$\Longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dK}{K} + \alpha \ \frac{du}{u} + \beta \ \frac{dv}{v} - \gamma \frac{du + dv}{(u + v)} - \ \delta \ \frac{dw}{w}$$

K est une constante alors : $dK = 0$

$$\frac{dP}{P} = \alpha \ \frac{du}{u} + \beta \ \frac{dv}{v} - \gamma \frac{du}{(u + v)} - \ \gamma \frac{dv}{(u + v)} - \ \delta \ \frac{dw}{w}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\gamma}{u+v}\right) du + \left(\frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{(u+v)}\right) dv - \frac{\delta}{w} dw$$

$$\Rightarrow dP = \left(\left|\frac{\alpha}{u} - \frac{\gamma}{u+v}\right| \Delta u + \left|\frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{(u+v)}\right| \Delta v + \frac{|\delta|}{w} \Delta w\right) P$$

Applications :

Calculer l'incertitude absolue sur W et N donnés par :

a) $W = R\, I^2 t$

Avec ΔR, ΔI , Δt sont les incertitudes absolues sur R, I, t.

b) $N = N_0\, e^{-\lambda t}$

Avec ΔN_0, $\Delta\lambda$, Δt sont les incertitudes absolues sur N_0, λ, t.

Solution :

a) $W = R\, I^2 t \Rightarrow \ln W = \ln R + 2 \ln I + \ln t$

$$\Rightarrow \frac{dW}{W} = \frac{dR}{R} + 2\frac{dI}{I} + \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\Rightarrow \Delta W = w\left(\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}\right)$$

Sachant que : $W = R\, I^2 t$, alors :

$\Delta W = I^2\, t\, \Delta R + 2\, R\, I\, t\, \Delta I + R\, I^2 \Delta t$

b) $N = N_0\, e^{-\lambda} \Rightarrow ln\, N = ln\, N_0 - \lambda t$

$$\Rightarrow d\, ln\, N = d\, ln\, N_0 - d\,(\lambda t)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dN_0}{N_0} - \lambda\, dt - t\, d\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta N_0}{N_0} + \lambda\, \Delta t + t\, \Delta\lambda$$

Pour faire apparaitre $\frac{\Delta t}{t}$ et $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ dans l'expression on procède de la manière suivante :

$\lambda\, \frac{1}{\lambda} = t\, \frac{1}{t} = 1$

Alors :

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta N_0}{N_0}+\lambda t\,\frac{\Delta t}{\mathrm{t}}+\lambda t\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\Longrightarrow\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta N_0}{N_0}+\lambda t\left(\frac{\Delta t}{\mathrm{t}}+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \Delta N=\left[\frac{\Delta N_0}{N_0}+\lambda t\left(\frac{\Delta t}{\mathrm{t}}+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)\right]N$$

Exercices :

1) La hauteur maximale h atteinte par un objet lancé depuis le sol avec une vitesse v_0, sous un angle α par rapport à l'horizontale, est donnée par la formule :

$$h=\frac{{v_0}^2\,sin^2\,\alpha}{2g}$$

Vérifier l'homogénéité de l'équation.

2) La pression à l'altitude z est donnée par l'expression $p(z)=\ p_0\ e^{(-c\ )}$ où c est une constante. Quelle est la dimension de c.

3) La vitesse limite atteinte par un parachutiste lesté par un avion s'écrit sous la forme : $v=k^xP^yS^z$

Où P représente son poids, S sa surface et k une constante d'unité $Kg.m^{-3}.x,y\ et\ z$ sont des nombres fractionnaires. Déterminer x,y et z et écrire l'expression finale de $\boldsymbol{v}$.

4) Trouver la dimension et l'unité de μ_0 qui intervient dans l'expression de la force magnétique F s'exerçant entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L séparés par une distance d et parcourus par les courants I et I'.

$$F=\frac{\mu_0.L}{4\pi d}\ I.I'$$

5) Déterminer la dimension et l'unité U et τ qui interviennent dans la relation :

$$U=RI_0\ \exp(-\,t/\tau)$$

Où I_0 est l'intensité du courant électrique, R est la résistance électrique et t est une durée de temps.

6) A l'aide d'un pendule pesant on mesure l'accélération de la pesanteur g qui s'exprime en fonction de la longueur du pendule, l, et la période des oscillations, T, par la relation :

$$g=4\,\pi^2\ l/T^2$$

Exprimer l'incertitude absolue sur g en fonction de Δl, ΔT, l et T.

7) Le débit d'un liquide est calculé en analysant l'écoulement d'un liquide dans une cuve cylindrique placée verticalement sur un plan et en mesurant la hauteur de la surface du liquide avant et après l'écoulement pour une durée de temps Δt. Le volume collecté au bout de Δt est donné par :

$$V = (h_2 - h_1)\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Où h_1 et h_2 sont les niveaux initial et final du liquide et D le diamètre du réservoir.

Si l'on considère la même erreur relative λ sur les mesures de h_1, h_2 et d, estimer l'erreur possible sur le volume

Réponses :

1)

$$h = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow [h] = \frac{[v_0]^2\ [\sin^2\alpha]}{[2][g]}$$

$$\left.\begin{array}{l} [h] = L \\ [v_0] = LT^{-1} \\ [\sin\alpha] = 1 \\ [2] = 1 \\ [g] = LT^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{(LT^{-1})^2\ (1)^2}{LT^{-2}}$$

$$\Rightarrow L = L$$

$$\Rightarrow l'\acute{e}quation\ est\ homog\grave{e}ne$$

2)

$$p(z) = p_0\, e^{(-cz)}$$

Pour : $e^{(-cz)}$, $[-cz] = 1 \Rightarrow [-c].[z] = 1$

$$\Rightarrow [c] = \frac{1}{[z]}$$

$$\Rightarrow [c] = L^{-1}$$

3)

$$v = k^x P^y S^z \Rightarrow [v] = [k]^x [P]^y [S]^z$$

$$\left.\begin{array}{l}[v]=LT^{-1}\\ [K]=ML^{-3}\\ [P]=MLT^{-2}\\ [S]=L^{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow LT^{-1}=(ML^{-3})^{x}(MLT^{-2})^{y}(L^{2})^{z}$$

$$\Longrightarrow LT^{-1}=M^{x+y}\,L^{-3x+y+2z}\;\;T^{-2y}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases}1=-3x+y+2z \quad pour\ L\\ 0=x+y \quad \dots\dots\dots\ pour\ M\\ -1=-2y \quad \dots\dots\dots\ pour\ T\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases}x=-1/2\\ y=1/2\\ z=\ -1/2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ v=k^{-1/2}\,P^{1/2}\,S^{-1/2}$$

$$\Longrightarrow\ v=\sqrt{\frac{P}{K\,S}}$$

4)

$$F=\frac{\mu_0.L}{4\pi d}\,I.I'\Longrightarrow \mu_0=\frac{4\pi\,d\,F}{L\,I\,I'}$$

$$\Longrightarrow [\mu_0]=\frac{[4\pi]\,[d]\,[F]}{[L]\,[I]\,[I']}$$

$[4\pi]=1$

$[d]=L$
$[F]=MLT^{-2}$
$[L]=L$
$[I]=[I']=I$

$$[\mu_0]=\frac{[4\pi]\,[d]\,[F]}{[L]\,[I]\,[I']}\Longrightarrow [\mu_0]=\frac{1\,L\,MLT^{-2}}{L\,I\,I}$$

$$\Longrightarrow [\mu_0]=LM\,T^{-2}\,I^{-2}$$

5)

$U=RI_0\,\exp(-\,t/\tau)$

Dans ce cas la formule est sous forme d'un produit ; on utilise alors la propriété (13) des équations aux dimensions ; ainsi :

$[U]=[R][I_0\,][exp(-\,t/\tau)]$

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{u}{i} = \frac{E\,d}{i} \\ E &= \frac{F}{q} \\ q &= i\,t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow R = \frac{F\,d}{t\,i^2}$$

$$\Longrightarrow [R] = \frac{[F]\,[d]}{[t]\,[i]^2} = \frac{MLT^{-2}\,L}{T\,I^2}$$

$$\Longrightarrow [R] = M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-2}$$

$[I_0\,] = I$

$[exp(-\,t/\tau)] = 1$

D'où :

$[U] = \ M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-1}$

Dans $exp(-\,t/\tau)$; $\quad [-\,t/\tau] = 1 \Longrightarrow [-t] = [\tau]$

$$\Longrightarrow [t] = [\tau]$$

$$\Longrightarrow [\tau] = T$$

6)

$$g = \frac{4\,\pi^2\ l}{T^2} \Longrightarrow ln\,g = ln4\,\pi^2\ + ln\,l - 2\,ln\,T$$

$$\Longrightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$\Longrightarrow \Delta g = g\left|\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}\right|$$

$$\Longrightarrow \Delta g = \frac{4\,\pi^2\ l}{T^2}\left|\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}\right|$$

7)

$$V = (h_2 - h_1)\,\pi\,\left(\frac{D}{2}\right)^2 \Longrightarrow \frac{dV}{V} = \frac{d(h_2 - h_1)}{h_2 - h_1} + \frac{d\,\pi}{\pi} + 2\frac{d\,D}{D}$$

$$\Longrightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dh_2}{h_2 - h_1} - \frac{dh_1}{h_2 - h_1} + 2\frac{d\,D}{D}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_2}{h_2 - h_1} + \frac{\Delta h_1}{h_2 - h_1} + 2\frac{\Delta D}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_2}{h_2}\frac{h_2}{(h_2 - h_1)} + \frac{\Delta h_1}{h_1}\frac{h_1}{(h_2 - h_1)} + 2\frac{\Delta D}{D}$$

Avec :

$$\frac{\Delta h_1}{h_1} = \frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{\Delta D}{D} = \lambda$$

Alors :

$$\frac{\Delta V}{V} = \lambda\left[\frac{h_2}{(h_2 - h_1)} + \frac{h_1}{(h_2 - h_1)} + 2\right]$$

Chapitre II

Calcul vectoriel

Dans tout ce qui va suivre, on travaillera dans un repère orthonormé (O, X, Y, Z) muni des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

1) Généralités :

En physique, on distingue deux types de grandeurs :

- Une grandeur scalaire qui est exprimée par une valeur numérique et suivie par son unité. Le temps, la distance, la température sont des grandeurs scalaires.
- Une grandeur vectorielle qui est une entité mathématique définie par *une origine*, *un sens* (l'orientation est de l'origine vers l'extrémité), *une direction* (ou le porteur) et *un module* (la longueur). Citons comme exemple : la force $\vec{F}$, la vitesse $\vec{v}$ le champ électrique $\vec{E}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est définie par :
L'origine A
La droite (Δ)
Le sens de A vers B
Le module qui est la longueur AB

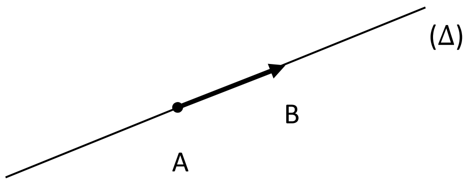


Figure II.1 : représentation d'un vecteur

On considère le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$, et on donne $A\ (-1,2,1), B\ (3,1,2)$

Alors $\vec{V}$ aura les composantes suivantes : $\vec{V}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - Z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} 3-(-\&1) \\ 1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{V}$ s'écrit aussi : $\vec{V} = 4\vec{\imath}$ -$\vec{\jmath} + \vec{k}$

Le module de $\vec{V}$ est noté $\|\vec{V}\|$ ou $|\vec{V}|$ et est calculé de la manière suivante :

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{……………………….(25)}$$

$|\vec{V}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^{2+}1^2} = \sqrt{18}$

Le module d'un vecteur est un scalaire positif, ceci est cohérent avec la définition du module qui n'est autre qu'une longueur.

2) Types de vecteurs :

On définit trois types de vecteurs

- Un vecteur lié : défini par sa droite d'action, son sens, sa norme et son origine (point d'application). On citera l'exemple du poids $\vec{P}$ d'un corps rigide qui a un point d'application bien précis qui est le barycentre ou le centre de gravité du corps. On dira que le poids est représenté par un vecteur lié.
- Un vecteur glissant : défini par son support, son sens et son module. Son origine peut être quelconque sur le support (droite d'action). On cite, l'exemple d'une force appliquée à un solide indéformable qui peut glisser sur le support sans modifier l'effet qu'elle produit. On dira que la force est représentée par un vecteur glissant.
- Un vecteur libre : il est défini par sa direction, son sens et sa valeur, son origine pouvant être quelconque dans l'espace. On citera ici l'exemple du vecteur de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. On dira que le vecteur de l'accélération est un vecteur libre.

3) Notion du vecteur unitaire :

A chaque vecteur $\vec{V}$ correspond un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui a la même direction et le même sens que $\vec{V}$ et sa norme égale à l'unité, avec :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \qquad \text{(26)}$$

Application : Trouver le vecteur unitaire qui porte le vecteur $\vec{V} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Réponse :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{18}} \implies \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{18}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{k}$$

4) Opérations sur les vecteurs :

Soit $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{V_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \quad = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$

$\vec{V_2} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k} \quad = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

$\vec{V_3} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \quad = x_3\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k}$

4.1) Somme de deux vecteurs :

La somme des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ se fait comme suit :

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

Application : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = (1+3)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$

$\vec{V_1} + \vec{V_2} = 4\,\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

Représentation :

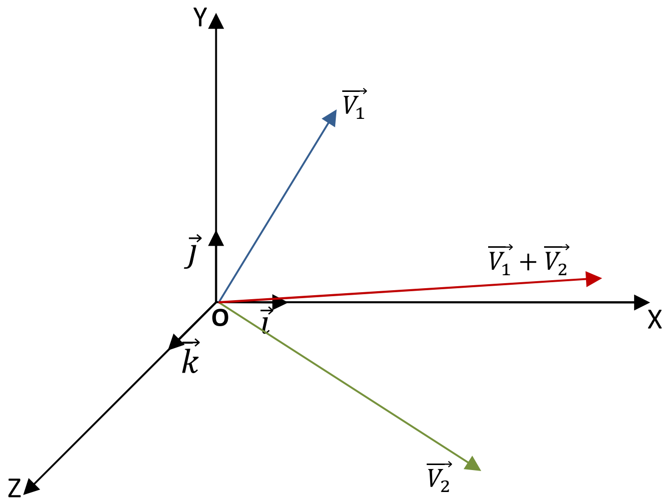


Figure II.2 : Somme de deux vecteurs de même origine

Géométriquement si deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ ont la même origine, la somme $\vec{V_1} + \vec{V_2}$ est obtenue en dessinant la résultante des vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Dans le cas où les deux vecteurs n'ont pas la même origine, la somme de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est obtenue en faisant une translation de $\vec{V_2}$ au point d'arrivée de $\vec{V_1}$; puis en reliant le point de départ de $\vec{V_1}$ au point d'arrivée de $\vec{V_2}$ par un vecteur déterminant la somme de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

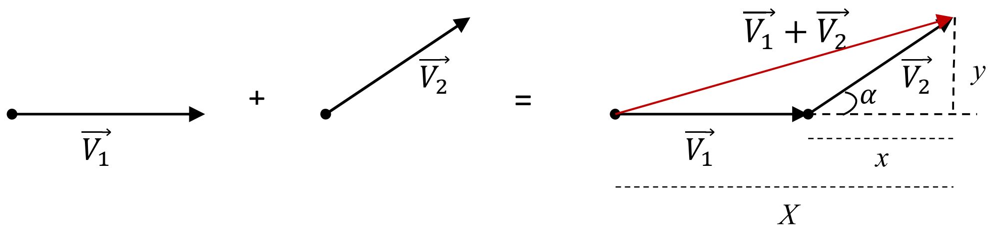


Figure II.3 : Somme de deux vecteurs d'origines différentes

Posons : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{W}$

Nous avons : $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{x}{V_2} \\ \sin\alpha = \frac{y}{V_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x = V_2 \cos\alpha \\ y = V_2 \sin\alpha \end{cases}$

$X = V_1 + x = V_1 + V_2 \cos\alpha$

$W^2 = X^2 + y^2 = (V_1 + V_2 \cos\alpha)^2 + y^2$

$$= {V_1}^2 + {V_2}^2 \cos^2\alpha + 2V_1V_2\cos\alpha + {V_2}^2\ sin^2\alpha$$

$$= {V_1}^2 + {V_2}^2 + 2V_1V_2\cos\alpha$$

D'où : $W = \sqrt{{V_1}^2 + {V_2}^2 + 2V_1V_2\cos\alpha}$

4.2) Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

Soit $\mathcal{R}$ le corps des nombres réels et soit le vecteur $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$$\forall\mu \in \mathcal{R}; \quad \mu\vec{V} = \mu\, x\,\vec{\imath} + \mu\, y\,\vec{\jmath} + \mu\, z\,\vec{k} \text{ ....(27)}$$

<u>Application</u> :

$\vec{V_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\mu\vec{V_1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\ \vec{\imath} + \left(-\frac{1}{2}\right) 2\,\vec{\jmath} - \left(-\frac{1}{2}\right)\ \vec{k} \Rightarrow \mu\vec{V_1} = -\frac{1}{2}\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \frac{1}{2}\ \vec{k}$$

4.3) Produit scalaire de deux vecteurs :

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ noté $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ est un nombre réel tel que : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\ \|\vec{V_2}\|\cos\theta$

θ : l'angle le plus petit entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

<u>Conséquence</u> :

D'une manière générale, si $\begin{cases} \vec{V_1} \neq 0 \\ \vec{V_2} \neq 0 \\ \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2}$$

Pour prouver que deux vecteurs sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que leur produit scalaire est nul.

<u>Propriétés du produit scalaire</u> :

- La commutativité : le produit scalaire est commutatif : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1}$

  $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\ \|\vec{V_2}\|\cos\theta$

  $= \|\vec{V_2}\|\ \|\vec{V_1}\|\cos(-\theta)$ (Cosinus est une fonction paire)

  $= \vec{V_2}.\vec{V_1}$

- La distributivité par rapport à l'addition : le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition : $\vec{V_1}.(\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3}$

Application : Calculer l'angle entre les deux vecteurs

$\vec{V} = 3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - \vec{k}$

$\vec{V'} = -\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 1\vec{k}$

Réponse :

$$\vec{V}.\vec{V'} = \|\vec{V}\|\,\|\vec{V'}\|\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{\vec{V}.\vec{V'}}{\|\vec{V}\|\,\|\vec{V'}\|}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{V'}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{(3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - \vec{k}).(-\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 1\vec{k})}{\sqrt{14}\,\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{-3 \; + 4 - 1}{\sqrt{14}\,\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\pi}{2}$$

Alors $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont perpendiculairel'un à l'autre.

Formule d'Al-Kashi :

Voici une application importante du produit scalaire en géométrie. Parfois appelée « formule des cosinus » ou « théorème de Pythagore généralisé », cette formule est dûe au mathématicien perse Al-Kashi (né vers 1380 à Kashan en Iran et mort en 1429 à Samarcande en Ouzbékistan)

Dans un triange (ABC) quelconque, on note :

$a = BC$

$b = AC$

$c = AB$

$\hat{A} = \widehat{BAC} \qquad \hat{B} = \widehat{CBA} \qquad \hat{C} = \widehat{BCA}$

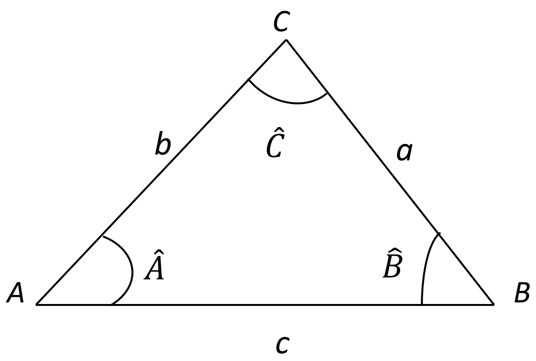


Figure II.4 : Triangle utilisé par Al-Kashi

Nous avons :

$$a^2 = BC^2 = \vec{BC}.\vec{BC}$$

$$= (\vec{BA} + \vec{AC}).(\vec{BA} + \vec{AC})$$

$= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

$= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,AC\,.\,AB\,.\cos\hat{A}$

D'où :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\hat{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Les trois côtés et les trois angles d'un triangle jouant des rôles similaires, on obtient :

$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\hat{C}$

4.4) Produit vectoriel de deux vecteurs :

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est le vecteur $\overrightarrow{W}$ noté $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$, de :

Direction : $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_2}$

Sens : $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{W}$ forment un trièdre direct.

Norme : $\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{V_2}\|\,\|\overrightarrow{V_1}\|\,\sin\theta$

θ : l'angle entre $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$

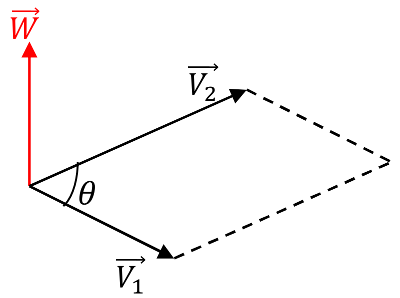


Figure II.5 : Produit vectoriel

<u>Conséquence</u> : Dans un repère orthonormé formé par les vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0} \\ \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

<u>Le calcul d'un produit vectoriel</u> : technique du déterminant

Soit : $\overrightarrow{V_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$

Et : $\overrightarrow{V_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

Alors : $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{\imath} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

Application :

1) Calculer $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ en sachant que : $\vec{V_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{V_2} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}$

Réponse :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -5\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \overrightarrow{9k}$$

2) Montrer que la surface S d'un paralllélogramme est égale au module du produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dormant ses cotés.

Réponse :

$S = h.AD = h\,.\|\overrightarrow{AD}\|$

Or : $h = AB.\sin\theta$

Donc : $S = \|\overrightarrow{AB}\|.\sin\theta.\|\overrightarrow{AD}\|$

$= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|.\sin\theta$

$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

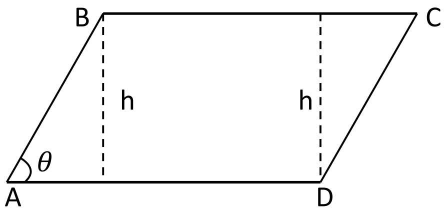


Figure II.6 : Paralllélogramme de surface S.

$\Longrightarrow S = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$ On rajoute la valeur absolue car la surface est toujours positive.

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel est anticommutatif ou antisymétrique :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1} \quad \text{.............................(29)}$$

Justification $(\sin\theta = -\sin\theta)$, le sinus est une fonction impaire.

- La distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_3} \quad \text{.............(30)}$$

Application : Vérifier les identités célèbres suivantes :

La formule de Gibbs : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U}.\vec{W}).\vec{V} - (\vec{U}.\vec{V}).\vec{W}$

L'identité de Jacoubi : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) + \vec{V} \wedge (\vec{W} \wedge \vec{U}) + \vec{W} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = 0$

L'identité de Lagrange : $(\vec{U}.\vec{V})^2 + \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2.\|\vec{V}\|^2$

4.5) Produit mixte de trois vecteurs :

Le produit mixte de trois vecteurs non nuls $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2},$ et $\overrightarrow{V_3}$ noté $[\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2},, \overrightarrow{V_3}]$ est un nombre réel p défini par $p = \overrightarrow{V_1} . (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$ et qui correspond au volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2},$ et $\overrightarrow{V_3}$.

$$p = \overrightarrow{V_1} . (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) \quad \text{.....................................(30)}$$

Avec : $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{OD}$

OD = aire OBB'C

$$p = \overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{OD} \Longrightarrow p = \overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OD}$$

$$\Longrightarrow |p| = OD. OA. \cos\alpha$$

$$\Longrightarrow |p| = OD. AA'$$

(avec *AA' : la hauteur du parallélépipède)*

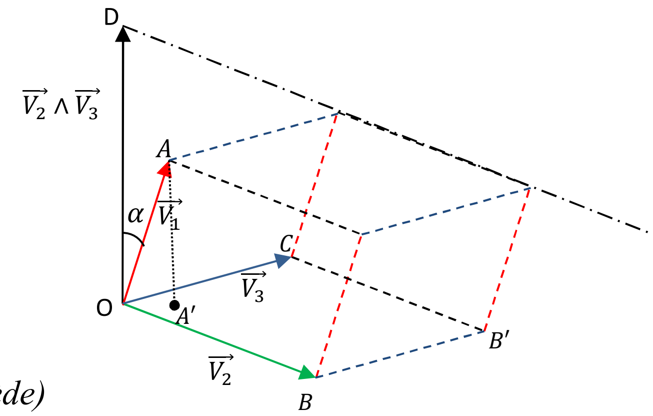


Figure II.7: Produit mixte

<u>Propriété du produit mixte :</u>

$$[\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2},, \overrightarrow{V_3}] = \overrightarrow{V_1}(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_3}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = \overrightarrow{V_2}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3}) \text{......(31)}$$

<u>N.B :</u>

1. Deux vecteurs sont égaux ou équipollents s'ils ont la même direction, le même sens et le même module.
2. Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même direction et la même norme mais sont de sens opposés.
3. Deux vecteurs sont parallèles ou (collinéaires) si leur produit vectoriel est nul.
4. Deux vecteurs sont perpondiculaires (orthogonaux) si leur produit scalaire est nul.

4.6) Dérivation vectorielle :

Question : Pourquoi a-t-on besoin des dérivées de vecteurs en physique ?

Réponse : Quelques grandeurs physiques peuvent être mesurées par des valeurs associées à chaque point de l'espace considéré, on parle d'un *champ*. Autrement dit, si G est une grandeur physique variante dans l'espace, alors l'ensemble des valeurs de G en tout point de l'espace considéré constitue un champ physique.

Si le champ est définie par un nombre on dit que le champ est un scalaire exemple : la température, la masse volumique... Si le champ est définie par un vecteur, on parle alors d'un champ vectoriel exemple : le champ électrique, le champ de la pesanteur…

En général, en physique, on exprime mathématiquement les champs vectoriels par des vecteurs dépendant des coordonnées des points et du temps car ils peuvent varier dans l'espace et dans le temps.

$$\vec{V}(x,y,z,t) = \vec{V}(\vec{r},t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

$\vec{r}$: le vecteur position

Puisque dans l'espace à trois dimension, chaque vecteur est représenté par trois composantes dans un système de coordonnées, et une autre variable du temps, Il existe 12 dérivées premières possibles, (9 dérivées partielles plus 3 dérivées temporelles).

Si : $\vec{V}= V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\vec{k} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

On pourra écrire les dérivées :

$$\begin{pmatrix} \delta V_x/\delta x & \delta V_x/\delta y & \delta V_x/\delta z \\ \delta V_y/\delta x & \delta V_y/\delta y & \delta V_y/\delta z \\ \delta V_z/\delta x & \delta V_z/\delta y & \delta V_z/\delta z \end{pmatrix} \text{ par rapport à l'espace}$$

$$\begin{pmatrix} \delta V_x/\delta t \\ \delta V_y/\delta t \\ \delta V_z/\delta t \end{pmatrix} \text{ par rapport au temps}$$

Ainsi si $\vec{V}$ est un vecteur dépendant du temps :

$$\vec{V}(t)= V_x(t)\vec{\imath}+ V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k} \Longrightarrow \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

<u>Propriétés</u> :

- $\frac{d}{dt}(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt} + \frac{d\vec{V_2}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = \left(\frac{d\vec{V_1}}{dt}\right)\vec{V_2} + \vec{V_1}\left(\frac{d\vec{V_2}}{dt}\right)$
- Si λ est une fonction scalaire alors : $\frac{d}{dt}\,\lambda(t).\vec{V}(t) = \left(\frac{d\,\lambda}{dt}\right)\vec{V} + \lambda\,\left(\frac{d\,\vec{V}}{dt}\right)$

- $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = \left(\frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}\right)$

Applications :

1) Soit un vecteur $\vec{W}$ telque $\left|\vec{W}\right|^2 = cste$.

Calculer $\frac{d\vec{W}^2}{dt}$. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{W}$ et $\frac{d\vec{W}}{dt}$?

Réponse :

$$\frac{d\vec{W}^2}{dt} = \frac{d(\vec{W}.\vec{W})}{dt} = \vec{W}\frac{d\vec{W}}{dt} + \frac{d\vec{W}}{dt}\ \vec{W}$$

D'où : $\frac{d\vec{W}^2}{dt} = 2\ \vec{W}.\frac{d\vec{W}}{dt}$

$\vec{W}^2 = \vec{W}.\ \vec{W} \quad (cste) \Longrightarrow \frac{d\vec{W}^2}{dt} = 0$

Alors: $2\ \vec{W}.\frac{d\vec{W}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{W}.\frac{d\vec{W}}{dt} = 0$

$\vec{W}$ et $d\vec{W}$ sont perpondiculairel'un à l'autre car leur produit scalaire est nul.

Ceci se reproduit dans le cas du mouvement circulaire uniforme. Avec $\vec{W}$ représente le vecteur position $\vec{r}$, et $\frac{d\vec{W}}{dt}$ représente le vecteur vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$.

$|\vec{r}^2|$= r^2 =cste $\Longrightarrow \frac{d\vec{r}^2}{dt} = 2\ \vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

$\Longrightarrow \vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

$\Longrightarrow \vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\Longrightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$

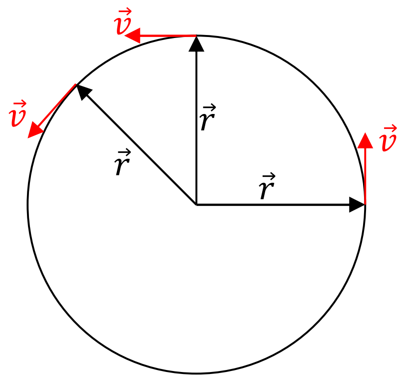


Figure II.8 : La vitesse dans un mouvement circulaire uniforme

2) Soit le vecteur $\vec{r} = cos^2\ \omega t\ \vec{\imath} + e^{-\omega t}\ \vec{k}$.

Calculer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Réponse :

Calcul de : $\frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(cos^2\,\omega t\,\vec{\imath} + \,e^{-\omega t}\,\vec{k}\right)}{dt} = \frac{d(cos^2\,\omega t\,\vec{\imath})}{dt} + \frac{d\left(\,e^{-\omega}\ \ \vec{k}\right)}{dt}$$

$$= \frac{d(cos^2\,\omega t\,)}{dt}\,\vec{\imath} + (cos^2\,\omega t\,)\frac{d(\vec{\imath})}{dt} + \frac{d(\,e^{-\omega t}\,)}{dt}\vec{k} + (e^{-\omega t})\frac{d\left(\vec{k}\right)}{dt}$$

$\frac{d(\vec{\imath})}{dt} = \frac{d(\vec{\jmath})}{dt} = \frac{d\left(\vec{k}\right)}{dt} = 0\ \ car\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} sont\ des\ vecteurs\ constants\ dans\ le\ temps.$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(cos^2\,\omega t\,)}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{d(\,e^{-\omega t}\,)}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\,\omega\,\cos\omega t\,\sin\omega t\,\vec{\imath} + \ -\omega\,e^{-\omega}\ \ \vec{k}$$

Calcul de : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-2\,\omega\,cos\,\omega t\,.\,sin\,\omega t\,\vec{\imath} + \ -\omega\,e^{-\omega t}\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(-2\,\omega\,cos\,\omega t.\,sin\,\omega t\,\vec{\imath}) + \frac{d}{dt}\left(\,-\omega\,e^{-\omega}\ \ \vec{k}\right)$$

$$= -2\,\omega\,\frac{d}{dt}(\,cos\,\omega t.\,sin\,\omega t)\,\vec{\imath} - \omega\frac{d}{dt}(\,\,e^{-\omega t}\,)\vec{k}$$

$$= \ (2\omega^2 sin^2\omega t - 2\omega^2\,cos^2\,\omega t)\vec{\imath} + (\omega^2 e^{-\omega}\ )\vec{k}.$$

5) Moment d'un vecteur :

5.1) Moment d'un vecteur par rapport à un point :

Soit $\vec{V}$ un vecteur qui passe par le point A. Le moment de $\vec{V}$ par rapport à un autre point B, noté $\vec{M}_{\vec{V}/B}$ est un vecteur et est défini comme suit :

$$\vec{M}_{\vec{V}/B} = \overrightarrow{BA}\ \wedge\ \vec{V}\ \text{.....................................(33)}$$

5.2) Moment d'un vecteur par rapport à un axe :

Soit $\vec{V}$ un vecteur qui passe par le point A et soit un axe (Δ) qui passe par un point B. Le moment du vecteur $\vec{V}$ par rapport à l'axe (Δ), noté $M_{\vec{V}/(\Delta)}$ est un nombre réel et est défini comme suit :

$$M_{\vec{V}/(\Delta)} = M_{\vec{V}/B}\,.\ \vec{u}_{(\Delta)}\text{..................................(34)}$$

Avec : $\vec{u}_{(\Delta)}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

Remarque **:** puisque les vecteurs unitaires des axes (xx'), (yy') et (zz') sont :

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{xx'})} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{yy'})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{zz'})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Alors, les moments d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport aux trois axes (xx') (yy') et (zz') :

$$M_{\vec{V}/(\mathrm{xx'})} = M_{\vec{V}/O} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{xx'})} = \left(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}\,\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X$$

$$M_{\vec{V}/(\mathrm{yy'})} = M_{\vec{V}/O} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{yy'})} = \left(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}\,\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$M_{\vec{V}/(\mathrm{xx'})} = M_{\vec{V}/O} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{zz'})} = \left(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}\,\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Z$$

Exercice d'application :

Soit $\vec{F} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ un vecteur passant par le point $A(3,4,2)$.

1) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine O et par rapport aux trois axes (OX), (OY) et (OZ).

2) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ) qui passe par l'origine O et dont les cosinus directeurs sont $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport au point B (3,6,0).

4) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ') qui passe par le point B et qui est parallèle à (Δ).

Réponse :

1) Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine O : $\boldsymbol{M}_{\vec{F}/O}$

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (12 + 4)\vec{\imath} - (9 - 2)\vec{\jmath} + (-6 - 4)\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = 16\,\vec{\imath} - 7\,\vec{\jmath} - 10\vec{k}$$

$$M_{\vec{F}/(\mathrm{OX})} = M_{\vec{F}/O} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_{(\mathbf{OX})} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\vec{F}/(\mathrm{OX})} = 16$$

$$M_{\vec{F}/(\mathrm{OY})} = M_{\vec{F}/O} \cdot \vec{u}_{(\mathrm{OY})} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\vec{F}/(\mathrm{OY})} = -7$$

$$M_{\vec{F}/(\mathrm{OZ})} = M_{\vec{F}/O} \cdot \vec{u}_{(\mathrm{OZ})} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\vec{F}/(\mathrm{OZ})} = -10$$

2) Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ) qui passe par l'origine: $\boldsymbol{M_{\vec{F}/(\Delta)}}$

$$M_{\vec{F}/(\Delta)} = \vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{u}_{(\Delta)} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-16}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} - \frac{10}{2} \Longrightarrow M_{\vec{F}/(\Delta)} = \frac{-16\sqrt{2} - 17}{2}$$

3) Le moment de $\vec{F}$ par rapport au point B : $\boldsymbol{M_{\vec{F}/B}}$

$$\vec{M}_{\vec{F}/B} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{avec : } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 3-3 \\ 4-6 \\ 2-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-6+4)\vec{\imath} - (0-2)\vec{\jmath} + (0+2)\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}/B} = -2\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

4) Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ') qui passe par le point B: $\boldsymbol{M_{\vec{F}/(\Delta')}}$

(Δ') est parallèle à (Δ), donc : $\vec{u}_{(\Delta)} = \vec{u}_{(\Delta')} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$M_{\vec{F}/(\Delta')} = \vec{M}_{\vec{F}/B} \cdot \vec{u}_{(\Delta')} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \Longrightarrow M_{\vec{F}/(\Delta')} = 2 + \sqrt{2}$$

6) Opérateurs vectoriels :

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaire et de vecteurs. L'importance de l'analyse vectorielle provient de son utilisation intensive en physique et dans les sciences de l'ingénieur.

Il existe trois opérateurs différentiels principaux appelés : le gradient, la divergence et le rotationnel. Ces trois opérateurs s'expriment avec l'opérateur différentiel formel « *nabla* ».

6.1) Opérateur formel nabla $\vec{\nabla}$:

C'est un opérateur différentiel vectoriel qui permet de représenter aisément les trois opérateurs fondamentaux. En coordonnées cartésiennes (x, y, z) et par rapport à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il s'écrit en trois dimensions sous forme :

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \text{ ....(35)}$$

6.2) Opérateur gradient $\overrightarrow{grad}$:

Le gradient s'applique sur une fonction scalaire et le résultat est un vecteur.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire, alors :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \text{ ....(36)}$$

Sens physique : le gradient représente la variation du champ scalaire dans les trois directions et indique le sens de la plus grande variation et son intensité. Exemple le gradient de l'attitude est dirigé selon la ligne de plus grande pente et sa norme augmente avec la pente.

<u>Propriétés</u> : Soit les fonctions scalaires f et g et les nombres réels α et β.

$$\overrightarrow{grad}\,(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{grad}\, f + \beta \overrightarrow{grad}\, g \text{ ....(37)}$$

$$\overrightarrow{grad}\,(fg) = f\,\overrightarrow{grad}\, g + g\,\overrightarrow{grad}\, f \text{ ....(38)}$$

<u>Application :</u> $f(x, y, z) = 2xyz^2$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \frac{\partial(2xyz^2)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(2xyz^2)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(2xyz^2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= 2yz^2\,\vec{\imath} + 2xz^2\,\vec{\jmath} + 4xyz\,\vec{k}$$

6.3) Opérateur divergence div :

La divergence s'applique sur un vecteur et le résultat est une fonction scalaire.

Soit le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}\,V_x + \frac{\partial}{\partial y}\,V_y + \frac{\partial}{\partial z}\,V_z \text{.....................(39)}$$

Sens physique : la divergence d'un vecteur $\vec{V}$ donne le flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée.

Propriétés : considérons les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ et les nombres réels α et β.

$$div(\alpha\,\vec{V} + \beta\vec{V}') = \alpha\,div\,\vec{V} + \beta\,div\,\vec{V}' \text{ ....(40)}$$

$$div(f\,\vec{V}) = f\,div\,\vec{V} + \vec{V}\,\overrightarrow{grad}\,f \text{.....................(41)}$$

Application : soit le vecteur $\vec{u} = -xz\,\vec{\imath} + xy^2\,\vec{\jmath} - y\,\vec{k}$.

$$div\,\vec{u} = \vec{\nabla}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -xz \\ xy^2 \\ -y_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,(-xz) + \frac{\partial}{\partial y}\,(xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}\,(-y)$$

$$= -z + 2xy$$

6.4) Opérateur rotationnel $\overrightarrow{rot}$:

Le rotationnel s'applique sur un champ de vecteurs et le résultat est un champ de vecteurs aussi.

Soit le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \text{..........................(42)}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Sens physique : comme son nom l'indique, le rotationnel décrit la rotation d'un champ de vecteurs, les lignes de champ ont tendance à tourner autour d'un point.

Propriétés :

Soit : f une fonction scalaire, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ des vecteurs et α et β des nombres réels.

$$\overrightarrow{rot}(\alpha \vec{V} + \beta \vec{V}') = \alpha \overrightarrow{rot}\, \vec{V} + \beta\, \overrightarrow{rot}\, \vec{V}' \quad \text{.....................(43)}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \quad \text{............................(44)}$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{V}\right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0 \quad \text{.............................(45)}$$

Application :

soit le vecteur $\vec{u} = -xz\ \vec{\imath} + xy^2\, \vec{\jmath} - y\ \vec{k}$. Calculer $\overrightarrow{rot}\, \vec{u}$.

Réponse :

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xz & xy^2 & -y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -y \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xz & -y \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -xz & xy^2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right]\vec{\imath} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial z}(-xz)\right]\vec{\jmath} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-xz)\right]\vec{k}$$

$$= (-1-0)\vec{\imath} - (0+x)\vec{\jmath} + (y^2-0)\vec{k}$$

$$= -\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + y^2\,\vec{k}$$

6.5) Laplacien Δ :

Le laplacien Δ peut s'appliquer à un champ scalaire ou vectoriel et donne un champ de même type. Par définition : $\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{……………………………(46)}$$

a- Laplacien d'une fonction scalaire :

Le laplacien d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ représente et traduit la courbure locale de f.

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{…………………(47)}$$

On remarque que le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire.

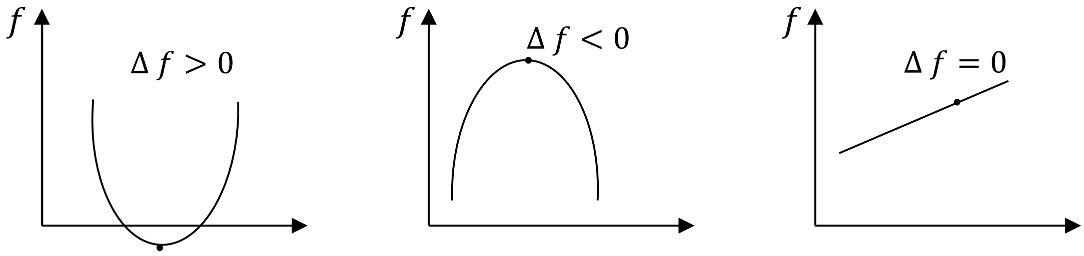


Figure II.9 : Le laplacien et la courbure d'une fonction

Aussi, on peut déduire :

$\Delta f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f$

$\quad = \vec{\nabla}.\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

$\Delta f = div.\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

b- Laplacien d'un vecteur :

Soit le vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$

$$\Delta = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \quad \text{…………………(48)}$$

On remarque que le laplacien d'un vecteur donne un vecteur.

Aussi, on peut déduire :

$\Delta \vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}.\vec{V}$

$\quad = \vec{\nabla}.\ div\,\vec{V}$

$\Delta \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}.\ div\,\vec{V}$

Application : soit le vecteur $\vec{u} = 2xy\,\vec{\imath} + (3x - y^2)\,\vec{\jmath} - xz^3\vec{k}$, et soit la fonction scalaire $\Psi = 4xz^2 - 2y^2z^3$.

Calculer le laplacien de $\vec{u}$ et de Ψ au point (0, -1, 1).

Réponse :

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\,\vec{\imath} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\,\vec{k}$$

$$= \frac{\partial^2(2xy)}{\partial x^2}\,\vec{\imath} + \frac{\partial^2(3x - y^2)}{\partial y^2}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial^2(-\,xz^3)}{\partial z^2}\vec{k}$$

$$= 0\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} - 6xz\vec{k}$$

Au point (0, -1, 1), $\Delta \vec{u} = -2\vec{\jmath} - 6(0.1)\vec{k}$

$$= -2\vec{\jmath}$$

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2(4xz^2 - 2y^2z^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(4xz^2 - 2y^2z^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(4xz^2 - 2y^2z^3)}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial(4z^2 - 0)}{\partial x} + \frac{\partial(0 - 4z^3y)}{\partial y} + \frac{\partial(8\,xz - 6y^2z^2)}{\partial z}$$

$$= 0 + z^3 + (8x - 12y^2\,z)$$

Au point (0, -1, 1), $\Delta\Psi = 0 + (1)^3 + (8(0) - 12\,(-1)^2.1)$

$$= 1 + 0 - 12$$

$$= -11$$

Exercices

Exercice 1 : Considérons deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, vérifier que :

$|\vec{V} + \vec{V}'| = |\vec{V} - \vec{V}'| \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{V}'$.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé (Oxyz), on considère les points $A(1,0,1)$ $B(2,0,0)$ et $C(0,1,1)$.

1) Déterminer les vecteurs positions : $\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}, \overrightarrow{0C}$.
2) Déterminer les composantes et le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Trouver les composantes et les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et en déduire l'angle $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC})$.

5) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$, le module $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|$, puis en déduire la surface du triangle (ABC).
6) Calculer le produit mixte : $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC})$.
7) Déterminer la distance entre les pointes A et B.
8) En déduire le périmètre du triangle (OAB).

Exercice 3 : Soient les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_4}$

$$\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + a\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_2} = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_3} = 3\vec{\imath} + b\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_4} = -6\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

1) Calculer les composantes de $\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_4}$.

2) Déterminer les valeurs de a et b pour que $\overrightarrow{V_1}$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{V_2}$, et $\overrightarrow{V_3}$ parallèle à $\overrightarrow{V_4}$.

Exercice 4 : Soient les vecteurs : $\vec{r} = \cos wt\,\vec{\imath} + \sin wt\,\vec{\jmath} + e^{-wt}\,\vec{k}$

1) Calculer : $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ et évaluer leur module à $t = 0$.

Exercice 5 : Soit le vecteur $\vec{u} = 2xy\,\vec{\imath} + (3x - y^2)\vec{\jmath} - xz^3\vec{k}$ et soit la fonction scalaire $\psi = 4xz^2 - 2y^2z^3$.

1) Calculer au point (1,-1,0) : $\overrightarrow{grad}\,\psi$, div $\vec{u}$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{u}$.
2) En déduire div ($\overrightarrow{rot}\,\vec{u}$) et $\overrightarrow{rot}$ ($\overrightarrow{grad}\,\psi$) .
3) Calculer le Laplacien de $\vec{u}$ et de ψ. Commenter votre résultat.

Exercice 6 : (facultatif)

Soit le vecteur $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

Prouver que : $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = 0$

Réponse :

Exercice 1 :

Vérifier que : $|\vec{V} + \overrightarrow{V'}| = |\vec{V} - \overrightarrow{V'}| \Rightarrow \vec{V} \perp \overrightarrow{V'}$.

Calculons d'abord le carré de $|\vec{V} + \vec{V'}|$ et de $|\vec{V} - \vec{V'}|$

$$|\vec{V} + \vec{V'}|^2 = \vec{V}^2 + \vec{V'}^2 + 2\vec{V}\,\vec{V'}$$

$$|\vec{V} - \vec{V'}|^2 = \vec{V}^2 + \vec{V'}^2 - 2\vec{V}\,\vec{V'}$$

On est bien d'accord que si : $|\vec{V} + \vec{V'}| = |\vec{V} - \vec{V'}| \Rightarrow |\vec{V} + \vec{V'}|^2 = |\vec{V} - \vec{V'}|^2$

$$|\vec{V} + \vec{V'}|^2 = |\vec{V} - \vec{V'}|^2 \Rightarrow \vec{V}^2 + \vec{V'}^2 + 2\vec{V}\,\vec{V'} = \vec{V}^2 + \vec{V'}^2 - 2\vec{V}\,\vec{V'}$$

$$\Rightarrow +2\vec{V}\,\vec{V'} = -2\vec{V}\,\vec{V'}$$

$$\Rightarrow \vec{V}\,\vec{V'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\vec{V} + \vec{V'}|^2 = |\vec{V} - \vec{V'}|^2 \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{V'}$$

Exercice 2 :

1) Les vecteurs positions $\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}, \overrightarrow{0C}$:

$$\overrightarrow{0A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{0B}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{0C}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

2) Les composantes, module et vecteur unitaire de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\0-0\\0-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \vec{\imath} - \vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|.\vec{U}_{AB} \Rightarrow \vec{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|.}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_{AB} = \frac{\vec{\imath} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_{AB} = \frac{\sqrt{2}\vec{\imath}}{2} - \frac{\sqrt{2}\vec{k}}{2}$$

3) Les composantes et les cosinus directeurs de $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\1-0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$$

Les cosinus directeurs de $\overrightarrow{BC}$ sont les composantes du vecteur unitaire$\overrightarrow{BC}$ notés α, β, γ

$$\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{BC}}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$\beta = \frac{y_{\overrightarrow{BC}}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\gamma = \frac{y_{\overrightarrow{BC}}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

4) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = (\vec{\imath}-\vec{k})(-2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}) = -2+0-1 = -3$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) \Longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{B}\|}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = \frac{-3}{\sqrt{2}.\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{12}} \simeq -0.866 \Longrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = 149.3°$$

5) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|$, la surface de (ABC) :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= [0-(-1)]\vec{\imath} - [(1)(0)-(-1)(-2)]\,\vec{\jmath} + [(1)(1)-0(-2)]\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{\imath} \mp \vec{\jmath} + \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

Le triangle (ABC) possède les cotés $(AB),(BC)$, et (CD). La surface du triangle représente la moitié de la surface du parallélogramme de cotés $(AB),(BC)$.

La surface du parallélogramme est calculé par : $S_{(ABCD)} = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|$

$$S_{(ABC)} = \frac{S_{(ABCD)}}{2} \Longrightarrow S_{(ABC)} = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}) = ?$:

$$\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -1+1+0$$

$$\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}) = 0$$

7) La distance entre A et B : L_{AB}

L_{AB} est le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

La distance entre le point A et le point Best : $L_{AB} \simeq 1.4$unité

8) Le périmètre du triangle (OBC): $P_{(OBC)}$

$$P_{(ABC)} = \|\overrightarrow{0A}\| + \|\overrightarrow{OB}\| + \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$P_{(ABC)} \simeq 4.8$ unité

Exercice 3 :

$\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + a\vec{k}$ $\qquad$ $\overrightarrow{V_2} = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

$\overrightarrow{V_3} = 3\vec{\imath} + b\vec{\jmath} - \vec{k}$ $\qquad$ $\overrightarrow{V_4} = -6\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

1) Calcul $\overrightarrow{W_1}$et $\overrightarrow{W_2}$:

$$\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{W_1}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W_1} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + (a+2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{W_1}\begin{pmatrix} -3 \\ b+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W_2} = -3\vec{\imath} + (b+1)\vec{\jmath} + \vec{k}$$

2) Les valeurs de a et b :

$$\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2} \Longrightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow -8 + 3 + 2a = 0 \Longrightarrow a = 5/2$$

Pour que $\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2}$ il faut que $a = 5/2$

$$\overrightarrow{V_1} // \overrightarrow{V_2} \Longrightarrow \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & b & -1 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow [2b - (-1)]\vec{\imath} - [6-6]\,\vec{\jmath} + [3 - (-6b)]\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow (2b+1)\vec{\imath} + (3+6b)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2b + 1 = 0 \\ 3 + 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b = -1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

Pour que $\overrightarrow{V_1} // \overrightarrow{V_2}$ il faut que $b = -1/2$

Exercice 4 :

$\vec{r} = \cos wt\,\vec{i} + \sin wt\;\vec{j} + e^{-wt}\,\vec{k}$

- $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\cos \quad \vec{}+si \qquad \vec{j}+e^{-wt}\,\vec{k})}{dt} = \frac{d(\cos wt)}{dt}\vec{i} + \frac{d(\sin wt)}{dt}\vec{j} + \frac{d(e^{-w}\;)}{dt}\vec{k}$

$$= -w\sin wt\;\vec{i} + w\cos wt\,\vec{j} - we^{-wt}\vec{k}$$

- $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} =?$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-w\sin wt\,)^2 + (w\cos wt)^2 + (-we^{-wt})^2}$$

$$= \sqrt{w^2\sin^2 wt\; + w^2\cos^2 wt + w^2e^{-2wt}}$$

$$= \sqrt{w^2 + w^2e^{-2wt}}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{2w^2} = \sqrt{2}\,w$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\left(-w\sin wt\;\vec{i} + w\cos wt\,\vec{j} - we^{-wt}\vec{k}\right)}{dt}$$

$$= -w^2\cos wt\,\vec{i} + -w^2\sin^2 wt\;\vec{j} + w^2e^{-wt}\vec{k}$$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{(-w^2\cos wt)^2 + (-w^2\sin wt\,)^2 + (w^2e^{-wt})^2}$$

$$= \sqrt{w^4\cos^2 wt + w^4\sin^2 wt\; + w^4e^{-2wt}}$$

$$= \sqrt{w^4 + w^4e^{-2wt}}$$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = \sqrt{w^4 + w^4} = \sqrt{2}\,w^2$$

Exercice 5 :

$\vec{u} = 2xy\,\vec{i} + (3x - y^2)\vec{j} - xz^3\vec{k}$ et soit la fonction scalaire $\psi = 4xz^2 - 2y^2z^3$.

1) $\overrightarrow{grad}\,\psi,\; div\,\vec{u},\; \overrightarrow{rot}\,\vec{u}$ au point :

- $\overrightarrow{grad}\,\psi = \vec{\nabla}\,\psi = \frac{\partial}{\partial x}\psi\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\psi\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\vec{k}$

$\overrightarrow{grad}\,\psi = 4z^2 - 4yz^3 + 8xz - 6y^2z^2$

Au point $(1,-1,0)$: $\overrightarrow{grad}\,\psi = 0$

- $div\,\vec{u} = \vec{\nabla}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2xy \\ 3x - y^2 \\ -xz^3 \end{pmatrix} = 2y - 2y - 3z^2$

  $div\,\vec{u} = -3z^2$

Au point $(1,-1,0)$: $div\,\vec{u} = 0$

- $\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 3x - y^2 & -xz^3 \end{vmatrix} = z^3\vec{j} + (3 - 2x)\vec{k}$

Au point $(1,-1,0)$ $\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{k}$

2) $div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{u})$ et $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\,\psi)$:

$$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}) = \vec{\nabla}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ z^3 \\ 3 - 2x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}0 + \frac{\partial}{\partial y}z^3 + \frac{\partial}{\partial z}(3 - 2x)$$

$div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}) = 0$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,\psi) = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{grad}\,\psi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4z^2 & -4yz^3 & 8xz - 6y^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-12yz^2 + 12yz^2)\vec{i} - (8z - 8z)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k}$$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,\psi) = 0$

3) Le Laplacien de $\vec{u}$ et le Laplacien de ψ.

$$\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\vec{u} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{u}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x\,\vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_y\,\vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_z\vec{k} \Rightarrow \Delta\vec{u} = -2\vec{j} - 6xz\vec{k}$$

$$\Delta\,\psi = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi = 8x - 4z^3 - 12y^2z$$

Commentaire :

$\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\,div\,\vec{u} = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{u}$

$\Delta\vec{u} = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{u}$ … … … . un vecteur

$\Delta\psi = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\psi = \vec{\nabla}\,\overrightarrow{grad}\,\psi = div\,\overrightarrow{grad}\,\psi$

$\Delta\psi = div\,\overrightarrow{grad}\,\psi$ … … … . un scalaire

Chapitre III

Cinématique

1) Système de coordonnées :

Il existe une infinitécde systèmes de coordonnées, cependant la physique ne dépend pas du système utilisé qui reste un outil de représentation de la réalité. Le choix du système de coordonnées dépendra du type de mouvement du point mobile. Dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté. Ce ne sera plus le cas pour des mouvement curvilignes pour lesquels le système de coordonnées polaires ou cylindriques sera le plus souvent utilisé.

1.1) Système de coordonnées cartésiennes :

On associe à l'espace un repère (OXYZ) dont les vecteurs unitaires sont $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Soit un point M qui appartient à cet espace. Dans le système de coordonnées cartésiennes, un point M est définit par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Soit m le point de projection du point M dans le plan (Oxy), comme cela est illustré sur la figure III.1

Alors : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

Et : $\overrightarrow{mM} = z\,\vec{k}$

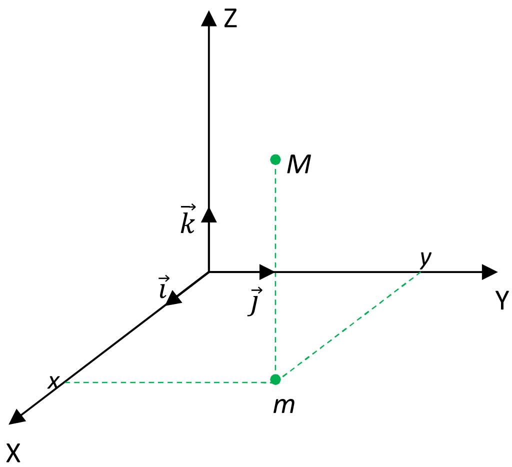


Figure III.1 : Coordonnées cartésiennes d'un point

Si on fait subir à $\overrightarrow{OM}$ une petite variation $d(\overrightarrow{OM})$dans le temps , on obtient alors le déplacement élémentaire $d\vec{l}$

$$d\vec{l} = d(\overrightarrow{OM}) = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \quad \text{..........(49)}$$

1.2) Système de coordonnées polaires :

Le système de coordonnées polaires est un système à deux dimensions (ρ, θ)

Soit le point M qui s'écrit dans le système de coordonnées cartésiennes $M(x, y)$.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

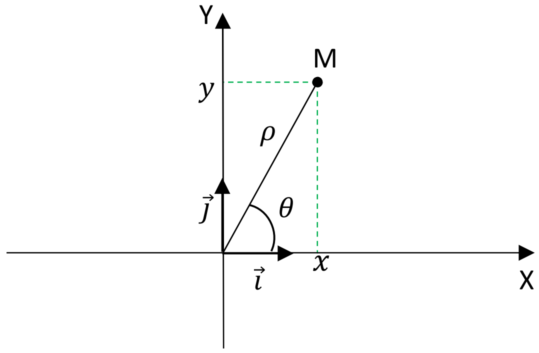


Figure III.2 : Coordonnées polaires d'un point

On définit la distance : $OM = \rho$

Et l'angle : $\widehat{xOM} = \theta$

Alors :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Les relations de transformation du système polaire vers le système cartésien sont facilement obtenues à partir des relations trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

<u>Les vecteurs unitaires $\vec{U}_\rho$ et $\vec{U}_\theta$:</u>

$\vec{U}_\rho$ représente le premier vecteur unitaire dans le système de coordonnées polaires. On peut vérifier son expression dans le repère (Oxy).

$$\vec{U}_\rho = \vec{U}_{\rho x} + \vec{U}_{\rho y}$$
$$= U_{\rho x}\,\vec{\imath} + U_{\rho y}\,\vec{\jmath}$$

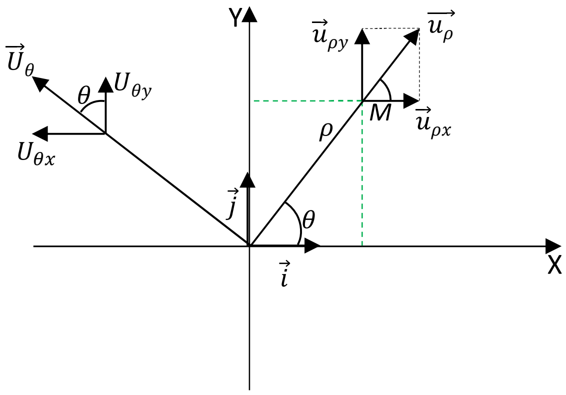


Figure III.3 : Vecteurs unitaires dans le système de coordonnées polaires

D'autre part :

$$\cos\theta = \frac{U_{\rho x}}{U_\rho} = \frac{U_{\rho x}}{1} \Rightarrow U_{\rho x} = \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{U_{\rho y}}{U_\rho} = \frac{U_{\rho y}}{1} \Rightarrow U_{\rho y} = \sin\theta$$

D'où :

$$\vec{U}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \quad \text{..........................(50)}$$

Le deuxième vecteur unitaire est : $\vec{U}_\theta$.

$\vec{U}_\theta = \vec{U}_{\theta x} + \vec{U}_{\theta y} \Rightarrow \vec{U}_\theta = U_{\theta x}\,(-\vec{\imath}) + U_{\theta y}\,\vec{\jmath}$

$\cos\theta = \frac{U_{\theta y}}{U_\theta} = \frac{U_{\theta y}}{1} \Rightarrow U_{\theta y} = \cos\theta$

$\sin\theta = \frac{U_{\theta x}}{U_\theta} = \frac{U_{\theta x}}{1} \Rightarrow U_{\theta x} = \sin\theta$

D'où :

$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \quad \text{........................(51)}$$

<u>Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:</u>

Les relations de transformations nous permettent d'écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\,\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\,\sin\theta\,\vec{\jmath}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\,(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho \quad \text{..(52)}$$

<u>Déplacement élémentaire $d\,\overrightarrow{OM}$:</u>

On appelle déplacement élémentaire la dérivée « par rapport au temps » du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho \Rightarrow d\,\overrightarrow{OM} = d\rho.\vec{U}_\rho + \rho.d\vec{U}_\rho$

$\Rightarrow d\,\overrightarrow{OM} = d\rho.\vec{U}_\rho + \rho.\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}.d\theta$

Car on ne sait dériver $\vec{U}_\rho$ que par rapport à θ.

$\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \vec{U}_\theta \quad \text{......................................(53)}$$

Finalement :

$$d\,\overrightarrow{OM} = d\rho.\vec{U}_\rho + \rho.d\theta.\vec{U}_\theta \quad \text{........................(54)}$$

1.3) Système de coordonnées cylindriques :

Soit le point $M(x, y, z)$ dans le système de coordonnées cartésiennes ; le même point M est défini par $M(\rho, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques.

Soit :

- m la projection de M dans le plan (Oxy) et $\rho = Om$.
- A la projection de m sur (Ox) et $OA = x$.
- B la projection de m sur (Oy) et soit $OB = y$.
- C la projection de M sur (OZ) et $OC = z$.

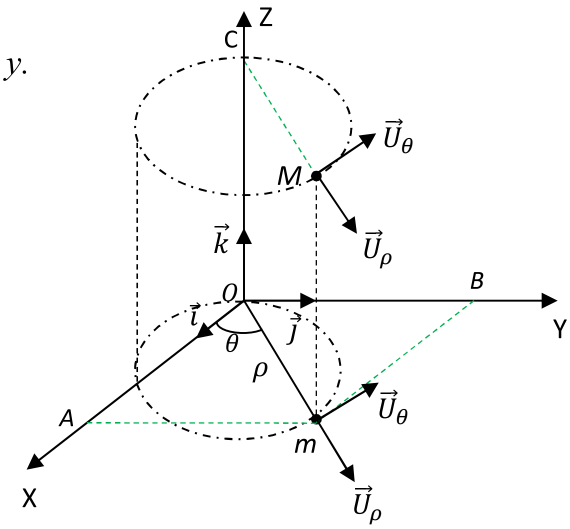


Figure III.4 : Coordonnées cylindriques d'un point

Ainsi :

$\widehat{OAm} = \widehat{OBm} = \widehat{OCM} = \frac{\pi}{2}$

Posons : $\theta = \widehat{AOm}$

Pour une meilleure visualisation, on considère les triangles (OAm) et (OBm)

Figure III.5 : Visualisation des triangles (OAm) et (OBm) en coordonnées cylindriques

- $\begin{cases} OA = mB = x \\ OB = Am = y \\ OC = z \end{cases} \Longrightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$

$$\Longrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{..(55)}$$

- $\tan\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
- z=z

Et $\begin{cases} \cos\theta = x/\rho \Rightarrow x = \rho\ \cos\theta \\ \sin\theta = y/\rho \Rightarrow y = \rho\ \sin\theta \end{cases}$

Sachant que z est constant, les équations de transformation du système cylindrique au système cartésien s'écrivent :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(56)$$

Vecteurs unitaires $\vec{U}_\rho$, $\vec{U}_\theta$ et $\vec{U}_z$:

Dans le système de coordonnées cylindriques, on compte trois vecteurs unitaires : $\vec{U}_\rho$, $\vec{U}_\theta$, $\vec{U}_z$. Les expressions des deux premiers sont obtenues de la même manière que pour les coordonnées polaires, c'est-à-dire en faisant les projections de $\vec{U}_\rho$ et $\vec{U}_\theta$ sur les deux axes (Ox) et (OY). Par ailleurs, le vecteur unitaire $\vec{U}_z$ n'est autre que le vecteur unitaire $\vec{k}$. Ainsi on a:

$$\vec{U}_\rho = cos\,\theta\,\vec{\imath} + sin\,\theta\,\vec{\jmath} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(57)$$

$$\vec{U}_\theta = -sin\,\theta\,\vec{\imath} + cos\,\theta\,\vec{\jmath} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(58)$$

$$\vec{U}_z = \vec{k} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(59)$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Remplaçons *x, y* et *z* par leurs expressions déterminées données ci-dessus dans (56).

Alors : $\overrightarrow{OM} = \rho\,(cos\,\theta\,\vec{\imath} + sin\,\theta\,\vec{\jmath}) + z\vec{k}$

Avec: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$\overrightarrow{Om} = \rho\,(cos\,\theta\,\vec{\imath} + sin\,\theta\,\vec{\jmath}) = \rho\,\vec{U}_\rho$

$\overrightarrow{mM} = z\vec{k} = z\,\vec{U}_z$

Finalement : $$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U}_\rho + z\,\vec{U}_z \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(60)$$

Déplacement élémentaire $d\,\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\,\vec{U}_z \Longrightarrow d\,\overrightarrow{OM} &= d\left(\rho\,\vec{U}_\rho + z\,\vec{U}_z\right) \\ &= d\left(\rho\,\vec{U}_\rho\right) + d\left(z\,\vec{U}_z\right) \\ &= \rho.d\vec{U}_\rho + d\rho.\vec{U}_\rho + z.d\vec{U}_z + dz.\vec{U}_z \\ &= \rho.\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}\,d\theta + d\rho.\vec{U}_\rho + d\rho.\vec{U}_\rho + dz.\vec{U}_z \end{aligned}$$

Sachant que : $d\vec{U}_z = \vec{0}$ et que : $\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \vec{U}_\theta$

On obtient :

$$d\,\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho\,d\theta\;\vec{U}_\theta + dz\,\vec{U}_z \;.............(61)$$

1.4) Système de coordonnées sphériques :

Soit le point $M(x, y, z)$ dans le système de coordonnées cartésiennes, le même point M est défini par $M(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques.

Posons : $OM = r$ et soit :

• *m* la projection de *M* dans le plan (Oxy) et $\rho = Om$.

• *A* la projection de m sur (Ox) et *OA*= *x*.

• *B* la projection de m sur (Oy) et *OB*= *y*.

• *C* la projection de *M* sur *(OZ)* et *OC*=*z*.

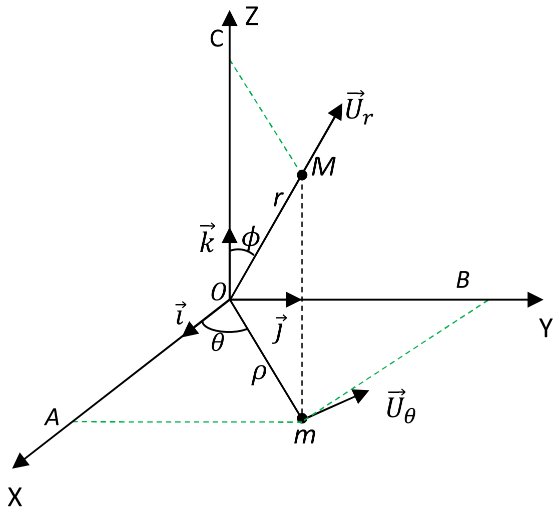


Figure III.6 : Coordonnées sphériques d'un point

Ainsi : $\widehat{OAm} = \widehat{OBm} = \widehat{OCM} = \frac{\pi}{2}$

Posons : $\theta = \widehat{AOm}$ et reprenons les triangles (*OAm*) et (*OBm*).

Figure III.7 : Visualisation des triangles (*OAm*) et (*OBm*) en coordonnées sphériques

Alors :

• $\begin{cases} OA = mB = x \\ OB = Am = y \\ OC = Mm = z \end{cases}$

• $\begin{cases} \cos\theta = x/\rho \;\Rightarrow x = \rho\cos\theta \\ \sin\theta = y/\rho \Rightarrow y = \rho\sin\theta \end{cases}$ ....(62)

On précise que $\rho = Om = CM$ n'est pas constant, on doit alors considérer un autre paramètre variant qui est l'angle ϕ afin de déterminer l'expression de ρ.

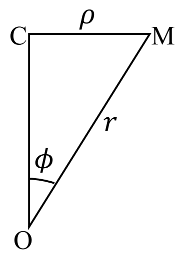


Figure III.8 : Visualisation du triangle (OCM) en coordonnées

Dans le triangle (OCM) :

$$\begin{cases} \sin\phi = {}^{\rho}/_{r} \Rightarrow \rho = r\sin\phi \ \ldots\ldots\ldots\ldots (a) \\ \cos\phi = {}^{z}/_{r} \Rightarrow z = r\cos\phi \ \ldots\ldots\ldots\ldots (b) \end{cases}$$

En remplaçant (a) dans (62), on obtient deux autres équations qui vont constituer avec l'équation (b) les équations de transformation du système sphérique au système cartésien:

$$\begin{cases} x = r\ \sin\phi\ \cos\theta \\ y = r\sin\phi\ \sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(63)$$

<u>Vecteurs unitaires $\vec{U}_\rho$, $\vec{U}_\theta$ et $\vec{U}_z$:</u>

Dans le système de coordonnées sphériques, le point M est défini par (r,θ,ϕ) ; ceci permet d'identifier les trois vecteurs unitaires : $\vec{U}_r$, $\vec{U}_\theta$, $\vec{U}_\phi$. L'expression de $\vec{U}_r$ est obtenue directement à partir du système d'équations (63). En projetant $\vec{U}_\theta$ sur les axes (OX) et (OY), on constate que le vecteur $\vec{U}_\theta$ conservera la même expression que précédemment. Cependant $\vec{U}_\phi$ est défini comme étant la dérivée du vecteur $\vec{U}_r$ par rapport à l'angle ϕ.

Ainsi :

$$\vec{U}_r = \sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\phi\,\vec{k} \quad \ldots\ldots(64)$$

$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(65)$$

$$\vec{U}_\phi = \frac{d\,\vec{U}_r}{d\phi} = \frac{d\left(\sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + \ \cos\phi\,\vec{k}\right)}{d\phi}$$

$$\vec{U}_\phi = \cos\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} - \ \sin\phi\,\vec{k} \quad \text{..........(66)}$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|\vec{U} \implies \overrightarrow{OM} = r\,\vec{U}_r$

$$\overrightarrow{OM} = r\left(\sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\phi\,\vec{k}\right) \quad \text{.............(67)}$$

Déplacement élémentaire $d\,\overrightarrow{OM}$:

Le déplacement élémentaire représente la variation du vecteur position au, donc sa dérivée par rapport au temps.

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{U}_r \implies d\overrightarrow{OM} = d\left(r\,\vec{U}_r\right) = r\,.d\vec{U}_r + \vec{U}_r.dr$

$d\vec{U}_r$= ??

$\vec{U}_r = \sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + \ \cos\phi\,\vec{k}$

$\vec{U}_r$ dépend de deux variables θ et ϕ. La dérivée totale de $\vec{U}_r$ est la somme de deux dérivées partielles. La première par rapport à θ (en considérant ϕ constant) et la deuxième par rapport à ϕ en considérant θ constant.

$$d\vec{U}_r = \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\phi}\,d\phi$$

$$d\vec{U}_r = \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$= [\sin\phi(-\sin\theta)\,\vec{\imath} + \sin\phi\cos\theta\,\vec{\jmath}]d\theta + \left[\underbrace{\cos\phi\cos\theta\ \vec{\imath} + \cos\phi\ \sin\theta\vec{\jmath} - \sin\phi\,\vec{k}}_{=\vec{U}_\phi}\right]d\theta$$

$$= \sin\phi(\underbrace{-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}}_{=\vec{U}_\theta})\,d\theta + \vec{U}_\phi\,d\theta$$

$d\vec{U}_r$= $\sin\phi\,\vec{U}_\theta\,d\theta + \vec{U}_\phi\,d\theta$

Finalement :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{U_r} + r\ \sin\phi\ \ d\theta\ \ \overrightarrow{U_\theta} + \ r\ \ d\phi\,\overrightarrow{U_\phi} \text{.....(68)}$$

2) Cinématique d'un point matériel :

La cinématique est une branche de la mécanique qui s'intéresse à la description du mouvement d'un corps mobile sans considérer les causes et les forces qui en sont responsable.

La plupart des corps dans la nature sont en mouvement à différentes échelles : les voitures, les oiseaux, les planètes et les étoiles, les électrons…et on peut citer plusieurs types de mouvement :

-Mouvement de translation : exemple de mouvement d'une voiture sur une route.

-Mouvement de rotation : exemple du pendule autour d'un axe.

-Mouvement de vibration : exemple d'oscillation d'un système (masse+ ressort).

-Mouvement hélicoïdal : exemple d'une vis qu'on enfonce dans du bois.

<u>Point matériel :</u>

Afin de simplifier l'étude d'un corps mobile, on assimile ce dernier à un point matériel ou une masse ponctuelle de masse M et de volume V nul. Ceci veut dire qu'un point matériel possède une masse mais que ses dimensions géométriques sont très petites devant les distances caractéristiques du mouvement étudié. Généralement, on réduit le corps à son centre de gravité.

Par ailleurs, dans l'étude du mouvement d'un mobile M, la notion du temps est très importante, en l'occurrence la description se fait à un instant t donné. La notion de l'espace est aussi importante que celle du temps et la position $\overrightarrow{OM}$ doit être déterminée dans un repère d'origine O. Selon le besoin et la faisabilité, l'un des systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, sphériques…) est utilisé pour l'étude. Ainsi, le mouvement est dépendant du référentiel.

<u>Référentiel</u> :

Le mouvement d'un point est un concept relatif. En d'autres termes, on ne peut dire qu'un corps est « en mouvement » (ou « au repos ») que si l'on précise par rapport à quel repère. Pour connaitre la position d'un point mobile par rapport à ce repère et l'instant correspondant à cette position, on doit définir un repère muni d'un chronomètre (repère spatial + repère temporel) qu'on nomme référentiel.

Equation horaire :

L'évolution des coordonnées de position d'un point mobile au cours du temps définie l'équation horaire.

Notion de la trajectoire :

La trajectoire est l'ensemble géométrique des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport au référentiel choisi.

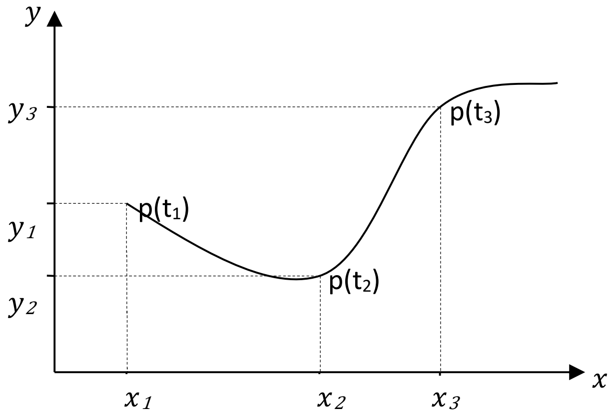


Figure III.9 : La trajectoire d'un mobile

Ainsi :

L'équation de la trajectoire $y = f(x)$ illustrée sur la figure ci-contre (III.9) vérifie tous les points qu'occupe le mobile et s'obtient en supprimant la variable « temps » des équations horaires.

Application :

Donner l'équation de la trajectoire d'un corps se déplaçant dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$suivant les équations :

$$\begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = t^2 + 2t \end{cases}$$

Réponse :

Nous devons construire l'équation $y = f(x)$

$x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$

$\Rightarrow y = (x - 1)^2 + 2\,(x - 1)$

$\Rightarrow y = x^2 - 1$

C'est l'équation d'une parabole.

Afin de représenter la courbe, on se sert de ce petit tableau qui regroupe quelques points d'abscisses x et leurs images y

x	0	-1	1	-2	2
y	-1	0	0	3	-3

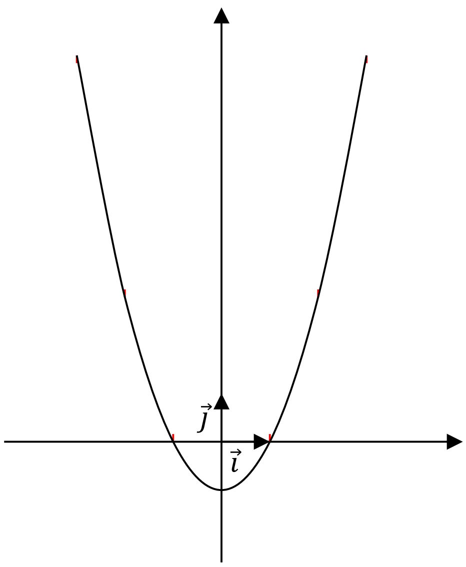


Figure III.10 : Représentation de la parabole de la trajectoire

Translation des solides :

Lorsqu'un solide est en translation :

- ✓ Chaque ligne de ce solide se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.
- ✓ Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.
- ✓ Tous les points du solide ont la même vitesse.
- ✓ Tous les points du solide ont la même accélération.

2.1) Mouvement de translation rectiligne :

Soit un corps solide qui se déplace sur un axe (ox). On appellera :

x_0 : La distance initiale à l'instant t_0

x_1 : La distance à l'instant t_1

x_2 : La distance à l'instant t_2

Δt : La différence de temps entre deux instants.

Δx : La différence de distance entre deux points.

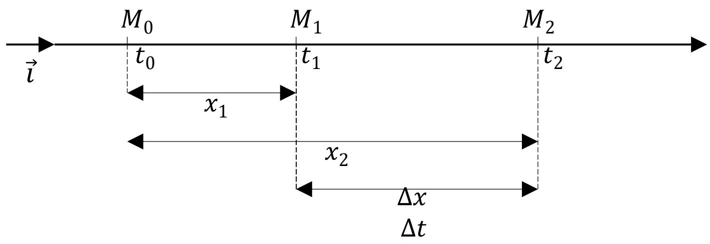


Figure III.11 : Positions du solide en translation

a) Vecteur vitesse :

La vitesse est une caractéristique du mouvement qui traduit la variation de la position par rapport au temps. La vitesse est une entité vectorielle puisque le mouvement d'un point se caractérise par un module, une direction et un sens. On distingue deux vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

- Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne notée $\vec{v}_{moy}$ est la variation de la distance totale par rapport au temps écoulé. Cette vitesse moyenne ne prend en considération que les points de départ et d'arrivée.

Supposons qu'un corps mobile se déplace de M_0 à M_2 entre les instants t_0 et t_2 . Sa vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ entre t_1 et t_2 est :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_0\,M_2} - \overrightarrow{M_0\,M_1}}{t_2 - t_1} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1\,M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{\imath} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

<u>Application</u> :

Sur un tronçon d'autoroute parfaitement rectiligne, un véhicule parcourt 15km en 4 minutes et 10 secondes. Déterminer la vitesse moyenne de ce véhicule.

<u>Réponse</u> : $v_{moy} = \frac{15.10^3}{(4.60)+10} = 60\ Km/h$

- Vitesse instantanée :

La vitesse instantanée notée $\vec{v}_{inst}$ est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence de temps tend vers zéro donc infiniment petite.

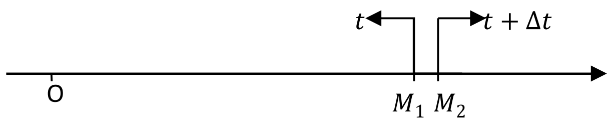


Figure III.12 : Différence de temps infinitésimale

$$\vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} \Longrightarrow \vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 O} + \overrightarrow{O M_2}}{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$$

Pour une durée élémentaire du temps Δt (très petite) la variation de la position est très petite aussi.

$$\vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

d'où: $$\vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

Puisque le vecteur $\vec{v}_{inst}$ est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, il en résulte que le vecteur $\vec{v}_{inst}$ est tangent à la trajectoire à chaque instant. Ainsi le sens de $\vec{v}_{inst}$ est le sens du mouvement.

<u>b) Vecteur accélération</u> :

L'accélération traduit les variations de la vitesse (ralentissement ou augmentation).

- L'accélération moyenne :

L'accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ entre les instants t_1 et t_2 est le rapport entre la différence des deux vitesses $\vec{v_2} - \vec{v_1}$ et la durée de temps $t_2 - t_1$.

$$\left(\vec{a}_{moy}\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\left(\vec{a}_{moy}\right)_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\vec{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\vec{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\,\vec{k} \quad \text{.......................(71)}$$

- Accélération instantanée :

L'accélération instantanée $\vec{a}_{inst}$ est la limite de l'accélération moyenne lorsque l'intervalle de temps est très petit et Δt tend vers zéro.

$$\vec{a}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{inst} = \frac{d\,\vec{v}_{moy}}{d\,t}$$

$$\vec{a}_{inst} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{k}$$

On pose : $\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$

Et on obtient : $|a_{inst}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$ ....(72)

2.2) Exemples de quelques mouvements rectilignes :

a) Le mouvement rectiligne uniforme :

C'est le mouvement le plus simple. Dans ce mouvement la trajectoire est une droite suivant un axe (Ox par exemple), la vitesse est constante et l'accélération est nulle.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = v \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = v(t - t_0) + x_0$$

Il s'agit de l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme.

Allure typique des graphes : Lors d'un mouvement rectiligne uniforme, les graphes de la position, la vitesse et l'accélération sont typiquement comme suit :

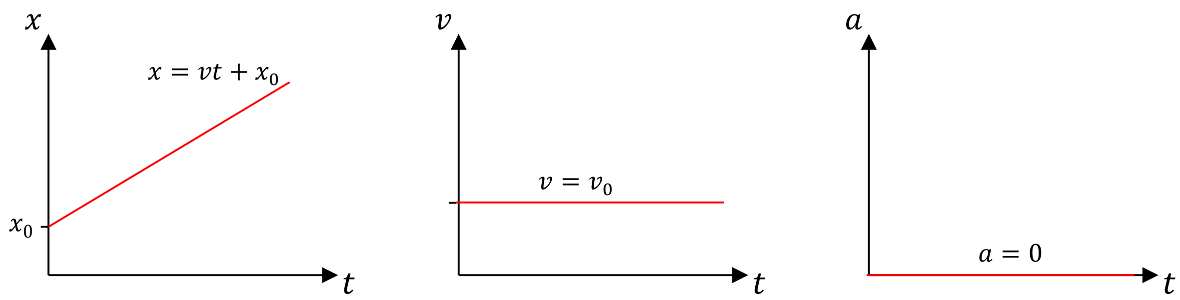


Figure III.13 : Graphes de la position, de la vitesse et de l'accélération dans un mouvement rectiligne uniforme

b) Mouvement rectiligne uniformément variable :

Dans ce mouvement la trajectoire est une droite et l'accélération est constante.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

$$\Rightarrow v = a(t - t_0) + v_0$$

Il s'agit de l'équation horaire de la vitesse.

Pour l'équation horaire de la position, il faut utiliser la différentielle.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\, dt$$

$$\Rightarrow dx = (at + v_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (at + v_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} at\, dt + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2\ v(t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2\ v(t - t_0) + x_0$$

Remarque :

$\vec{a}.\vec{v} > 0$ → alors le mouvement est dit accéléré.

$\vec{a}.\vec{v} < 0$ → alors le mouvement est dit retardé ou ralenti.

<u>Allure typique des graphes</u> :

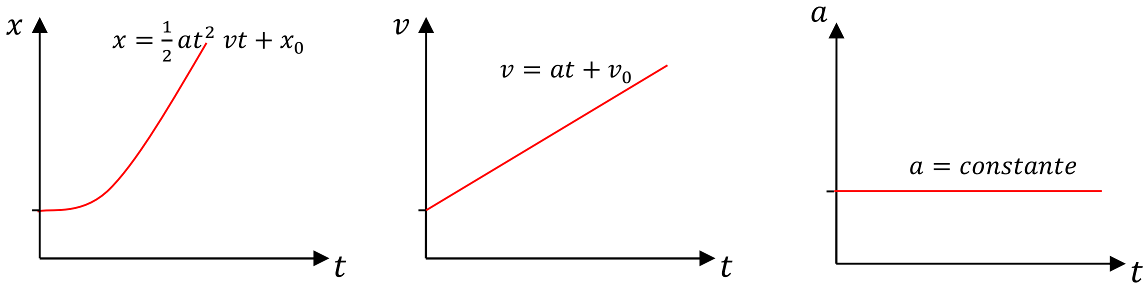


Figure III.14 : Graphes de la position, de la vitesse et de l'accélération dans un mouvement uniformément variable

c) Mouvement rectiligne sinusoïdal :

C'est un mouvement dont la trajectoire d'un point M est un segment de droite et dont le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$, tel que :

$$x(t) = x_M\,cos(\omega t + \psi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(73)$$

x_M est l'amplitude maximale

ω est la pulsation.

$\omega t + \psi$ est l'angle de phase

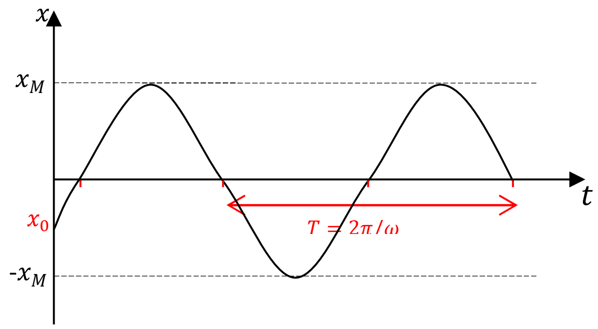


Figure III.15 : Evolution de la position dans un mouvement sinusoïdal

- L'angle de phase appelé aussi phase du mouvement est un angle qui précise la position du point M.
- L'équation $x(t)$ est appelée l'équation horaire du mouvement, elle possède une allure sinusoïdale.
- $cos(\omega t + \psi)$ varie entre -1 et +1, par conséquent, M oscille au cours du temps entre les positions $-x_M$ et $+x_M$.
- La trajectoire est donc un segment de droite de longueur $2x_M$.

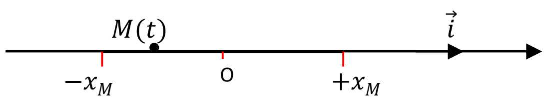


Figure III.16 : Segment de la trajectoire dans un mouvement sinusoïdal

Périodicité du mouvement sinusoïdale :

La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π ; ceci implique que le mouvement sinusoïdal est périodique. Il se reproduit identique à lui-même après une période T seconde. La relation entre la période T et la pulsation ω est donnée par la formule :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{.......................................(74)}$$

L'équation différentielle du mouvement :

Commençons par déterminer l'équation de la vitesse et celle de l'accélération.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d\ \left(x_M\, cos(\omega t + \psi)\right)}{dt}$$

$$\Rightarrow v = -x_M \omega\ sin(\omega t + \psi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d(-x_M \omega\ sin(\omega t + \psi))}{dt}$$

$$\Rightarrow a = -x_M \omega^2\, cos(\omega t + \psi)$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2\, x(t)$$

Nous avons : $\begin{cases} a = -\omega^2\, x \\ \quad et \\ a = \ddot{x} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2\, x = 0$

C'est l'équation différentielle qui régit le mouvement, dont la résolution donne exactement : $x(t) = x_M\, cos(\omega t + \psi)$

Application :

Trouver l'équation du mouvement d'un point matériel accroché à l'extrémité libre d'un ressort de constante de raideur K, sur un plan horizontal. Le mouvement s'effectue sans frottement autour de sa position d'équilibre O. On donne les conditions initiales suivantes :

à : $t = 0$; $x = a$ et $v = 0$.

Solution :

Le point matériel décrit un mouvement oscillant autour de sa position d'équilibre O, d'amplitude maximale a, c'est un mouvement périodique d'équation :

$x(t) = x_M\, cos(\omega t + \psi)$

Recherche de x_M et de ψ :

à : $t = 0$: $x(0) = x_M\, cos\, \psi \Longrightarrow\ x(0) = a\, cos\, \psi$

$$\Longrightarrow x(0) = a$$

à : t=0 : $v(0) = -x_M\omega\ \sin\psi \Longrightarrow v(0) = -x_M\omega\ \sin\psi = 0$

$$\Longrightarrow \sin\psi = 0$$

$$\Longrightarrow \psi = 0$$

D'où l'équation du mouvement : $x(t) = a\cos(\omega t)$

Ou alors : $$x(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

2.3) Mouvement curviligne :

Dans ce type de mouvement la position du point M est repérée par l'abscisse curviligne S qui constitue un arc noté : $S = S(t) = \widehat{M_0M}$

Ainsi par définition :

La vitesse $v(t)$ du point M appelée vitesse curviligne est donnée par :

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt}\text{.................................(75)}$$

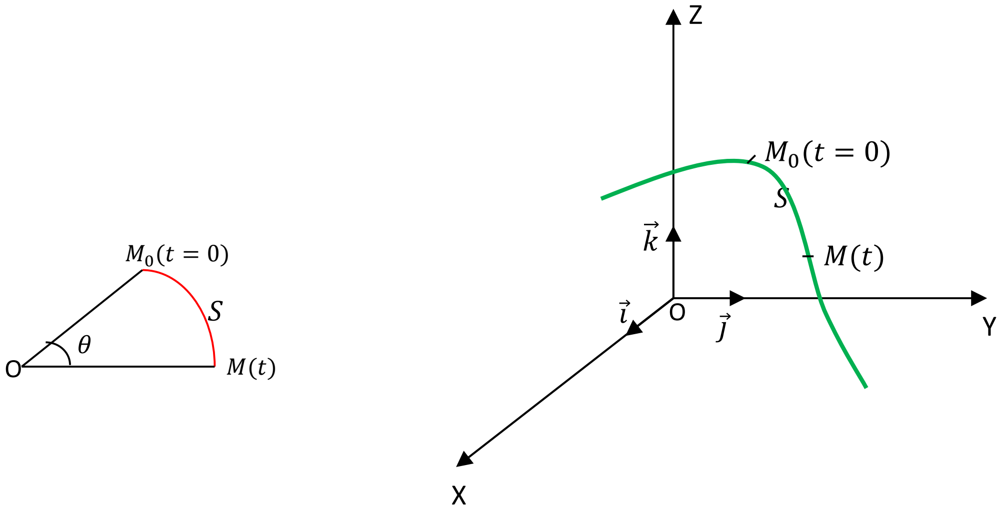


Figure III.17 : Mouvement curviligne d'un mobile

Notons que $v(t)$ est tangente à la trajectoire à chaque instant. Sous une forme vectorielle, la vitesse s'écrira :

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\overrightarrow{U_T}\text{.................................(76)}$$

Où $v(t)$ est le module de la vitesse et $\overrightarrow{U_T}$ est un vecteur unitaire tangentiel tel que :

$\overrightarrow{U_T} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

θ l'angle qui définit l'arc S.

En dérivant la vitesse, on retrouve l'expression de l'accélération $\vec{a}(t)$.

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{U_T} + v\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}$$

Puisque $\overrightarrow{U_T}$ dépend de θ qui, lui-même, dépend de t, alors on procèdera comme suit :

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

Avec : $S = \theta\, R \Rightarrow \theta = \frac{S}{R}$ (R est le rayon de courbure de la trajectoire du mouvement)

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{dS}{dt}\,\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = v\,\frac{1}{R}$$

Par ailleurs :

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta\ \vec{\imath} + \ \sin\theta\,\vec{\jmath})}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

On appelle :

$\overrightarrow{U_N} = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$, un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{U_T}$. (Voir figure III.18)

D'après les résultats précédents on trouve : $\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{v}{R}\,\overrightarrow{U_N}$

Enfin : $$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{U_T} + \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{U_N}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(77)$$

- $\frac{dv}{dt}$ est la composante tangentielle de l'accélération notée a_T tandis que la composante normale qui est toujours dirigée vers le centre de la courbure est $a_N = \frac{v^2}{R}$.
- Les deux vecteurs perpendiculaires $\overrightarrow{U_T}$ et $\overrightarrow{U_N}$ constituent les vecteurs unitaires de la base locale **intrinsèque**. Le repère correspondant à cette base est appelé : repère de **Frenet.**

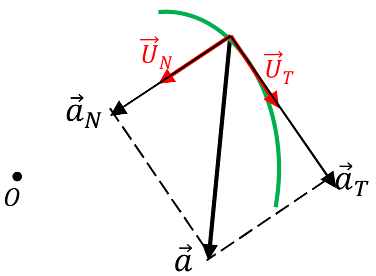
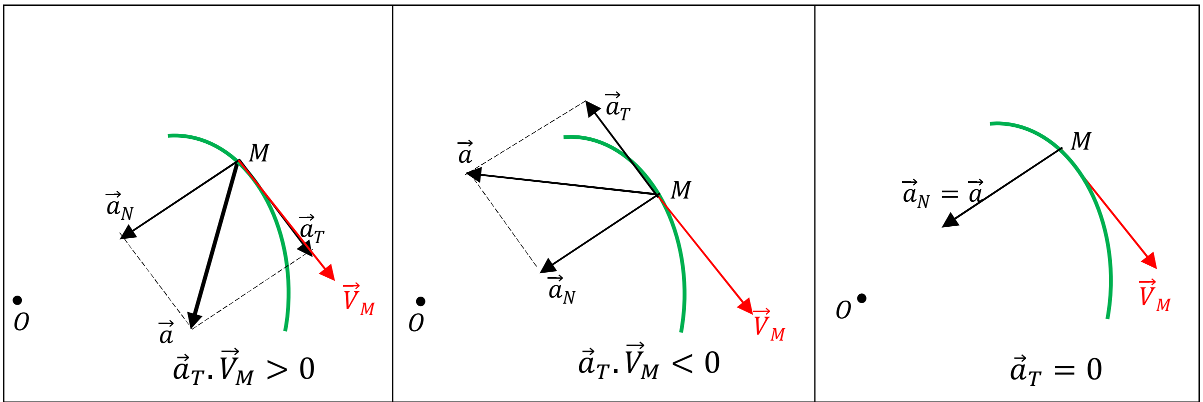


Figure III.18 : Vecteurs unitaires de la base intrinsèque de Frenet

D'après la valeur et la direction de la vitesse $\vec{V}_M$ du point M et de l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_T}$, trois différents cas décrivant la nature du mouvement peuvent se présenter : un mouvement accéléré, retardé ou uniforme. L'accélération normale $\overrightarrow{a_N}$ orientée vers le centre de la courbure, conservera son module $\frac{v^2}{R}$ quelque soit la nature du mouvement.



Mouvement accéléré.	Mouvement retardé (ralenti)	Mouvement uniforme.

Figure III.19 : Les différents cas du mouvement curviligne

<u>Application</u> : un point matériel est mobile dans le plan (OXY) tels que les équations horaires de sa position sont : $\begin{cases} x(t) = 3\,sin(\omega t + 2) \\ y(t) = 3\,cos(\omega t + 2) \end{cases}$

où ω est une constante.

1) Trouver l'équation de la trajectoire.
2) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération.
3) Calculer les accélérations tangentielle et normale. Quelle est la nature du mouvement.

<u>Réponse</u> :

1) L'équation de la trajectoire.

On utilise les équations horaires données pour former une relation entre x et y indépendante de t.

$x = 3\,sin(\omega t + 2) \Rightarrow x^2 = 9\,sin^2(\omega t + 2)$

$y = 3\,sin(\omega t + 2) \Rightarrow y^2 = 9\,cos^2(\omega t + 2)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9\,sin^2(\omega t + 2) + 9\,cos^2(\omega t + 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9[sin^2(\omega t + 2) + cos^2(\omega t + 2)]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{9}$

2) Les composantes des vecteurs vitesse et accélération.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3\ \omega\ cos(\omega t + 2)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -3\ \omega\ sin(\omega t + 2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -3\ \omega^2\ sin(\omega t + 2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -3\ \omega^2\ cos(\omega t + 2)$$

3) Les accélérations tangentielle et normale :

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{[3\ \omega\ cos(\omega t + 2)]^2 + [-3\ \omega\ sin(\omega t + 2)]^2}$$

$$v = \sqrt{9\omega^2} = 3\ \omega$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\ (3\ \omega)}{dt} = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{9\omega^2}{3} = 3\omega^2$$

a_T est nulle, ce qui veut dire que le mouvement est circulaire uniforme et l'accélération total a est une accélération normale appelée aussi centripète.

2.4) Mouvement circulaire :

Le mouvement circulaire appelé aussi le mouvement de rotation possède une trajectoire circulaire (un cercle complet ou une portion d'un cercle). La rotation du point matériel est définie par sa vitesse angulaire ω qui peut être une vitesse moyenne ou une vitesse instantanée.

2.4.1) Vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$:

La vitesse angulaire moyenne est donnée par :

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \quad \text{.................................(78)}$$

Avec θ_0 l'angle initial du point matériel à l'instant t_0 et θ l'angle balayé à l'instant t.

La vitesse angulaire instantanée est donnée par :

$$\omega_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{moy}$$

$$\omega_{inst} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \text{...................................(79)}$$

Où: θ est l'angle de rotation et θ_0 est l'angle déjà parcouru à t=0.

La vitesse angulaire se mesure en radian par seconde (rad/s).

2.4.2) Accélération angulaire $\dot{\omega}$:

L'accélération traduit la variation de la vitesse : augmentation ou diminution. Deux accélérations sont citées. La première, appelée accélération moyenne $\dot{\omega}_{moy}$ s'obtiendra par la différence de vitesse par rapport au temps. La seconde est dite instantanée $\dot{\omega}_{inst}$ et se calcule à un instant t, c'est-à-dire lorsque la variation de temps sera très proche de zéro $\Delta t \to 0$.

$$\dot{\omega}_{moy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad \text{..............................(80)}$$

et :

$$\dot{\omega}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \dot{\omega}_{moy} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} \quad \text{...............(81)}$$

2.4.3) Vitesse linéaire d'un point dans son mouvement de rotation :

Soit un point matériel A qui effectue un mouvement circulaire. Le centre de la trajectoire étant O et le rayon de courbure étant R. Le point A se déplace avec une vitesse linéaire $\overrightarrow{v_A}$. $\overrightarrow{v_A}$ est tangente en A à la circonférence du cercle ce qui explique qu'en tout point de la trajectoire : $\overrightarrow{v_A} \perp R$.

De plus, la vitesse linéaire $\overrightarrow{v_A}$ est liée à la vitesse angulaire ω par : $v_A = \omega R$

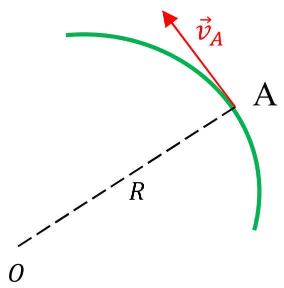


Figure III.20 : Vitesse linéaire dans un mouvement circulaire

2.4.4) Mouvement de rotation uniforme :

C'est un mouvement de rotation dont la vitesse angulaire est constante ($\omega = \dot{\theta} = cst$) et l'accélération angulaire est nulle. et que ($\ddot{\theta} = 0$).

On a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega \ dt$$

$$\Longrightarrow \theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

Si on prend l'origine des temps $t_0 = 0$, l'équation horaire de la position curviligne s'écrit alors :

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \text{.................................(82)}$$

2.4.5) Mouvement de rotation uniformément variable :

Dans ce type de mouvement la vitesse angulaire est variable et l'accélération est constante ($\dot{\omega} = \ddot{\theta} = cst$).

$$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} \dot{\omega} \ dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

$$\Longrightarrow \dot{\omega}(t - t_0) = \omega - \omega_0$$

En prenant l'origine des temps $t_0 = 0$, l'équation horaire de la vitesse se simplifie à :

$$\omega(t) = \dot{\omega} t + \omega_0 \text{...............................(83)}$$

D'autre part :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow d\theta = \omega \, dt$$

$$\Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega \ dt$$

$$\Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} (\dot{\omega} t' + \omega_0) \ dt'$$

$$\Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \dot{\omega} t' \ dt' + \int_{t_0}^{t} \omega_0 \, dt'$$

$$\Longrightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \dot{\omega} \left(t^2 - {t_0}^2\right) + \omega_0 (t - t_0)$$

En prenant l'origine des temps $t_0 = 0$, l'équation horaire de la position curviligne s'écrit :

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \text{.........................(84)}$$

Formule utile :

A partir des relations de la vitesse angulaire (83) et de la position curviligne (84), on forme une relation indépendante du temps, liant la position curviligne à la vitesse et l'accélération.

$$\begin{cases} \omega = \dot{\omega}t + \omega_0 & \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\dot{\omega}} \\ \theta = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

En remplaçant l'expression de t dans l'équation de la position curviligne θ, on obtient :

$$\theta = \frac{1}{2}\dot{\omega}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\dot{\omega}}\right)^2 + \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\dot{\omega}}\right) + \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\dot{\omega}\left(\frac{\omega^2 - 2\,\omega\omega_0 + \omega_0{}^2}{\dot{\omega}^2}\right) + \left(\frac{\omega_0\omega - \omega_0{}^2}{\dot{\omega}}\right) + \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\,\dot{\omega}^2}$$

Finalement :

$$\omega^2 = 2\,\dot{\omega}^2(\theta - \theta_0) + \omega_0{}^2 \quad \text{.................(85)}$$

3) Appendice :

Simplification des équations de mouvement par le choix de coordonnées :

Les lois de la physique ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé. Ce dernier reste un moyen pour simplifier les calculs, d'où la nécessité de choisir un base de coordonnées qui représente le problème étudié et simplifie les équations du mouvement.

Pour un mouvement rectiligne, il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le plus adapté. Cependant, pour les mouvements curvilignes les systèmes de coordonnées polaires ou cylindriques sont les plus fréquemment utilisés.

3.1) Mouvement dans la base cartésienne :

Soit un point matériel $M(x, y, z)$ qui se meut dans un repère (O, x, y, z) muni des vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. On a alors :

a) Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

b) Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \;\Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + \;v_z\,\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(86)$$

c) Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \;\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\,\dot{x}}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\,\dot{y}}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\,\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_x\,\vec{\imath} + a_y\,\vec{\jmath} + \;a_z\,\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(87)$$

3.2) Mouvement dans la base polaire :

Le système de coordonnées polaires est un système à deux dimensions. Le point M est repéré par la distance à l'origine ρ et l'angle θ .

a) Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \;\rho\vec{U}_\rho$$

b) Vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \;d\rho.\vec{U}_\rho + \;\rho.\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

D'où : $$\vec{v} = \;\dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(88)$$

c) Vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d^{\,2}\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

D'où : $$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\vec{U}_\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(89)$$

3.3) Mouvement dans la base cylindrique :

a) Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \;\rho\vec{U}_\rho + z\vec{U}_z$$

b) Vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \;d\rho.\vec{U}_\rho + \;\rho.\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{U}_z + z\frac{d\vec{U}_z}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \;\dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \;\dot{z}\,\vec{U}_z + z\frac{d\vec{U}_z}{dt}$$

Or : $\vec{U}_z = \vec{k}$ et $\frac{d\vec{U}_z}{dt} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{U}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \ \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \dfrac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dfrac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} = \vec{U}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{U}_\theta$$

Finalement :

$$\vec{v} = \ \dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \ \rho\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{U}_z \text{.........................(90)}$$

d) Vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \ \rho\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{U}_z\right)$$

$$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\left(\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) + \ddot{z}\,\vec{U}_z$$

$$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\left(\vec{U}_\theta.\dot{\theta}\right) + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\left(-\vec{U}_\rho.\dot{\theta}\right) + \ddot{z}\,\vec{U}_z$$

D'où :
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{U}_\rho + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{U}_\theta + \ddot{z}\,\vec{U}_z \text{.........................(91)}$$

3.4) Mouvement dans la base sphérique :

a) Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \ r\vec{U}_r$$

Avec : $\vec{U}_r = \sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + \ r\cos\phi\vec{k}$

b) Vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\vec{U}_r\right)}{dt}$$

$$\vec{v} = r\,\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \ \vec{U}_r\,\frac{dr}{dt}$$

$$\vec{v} = r\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \dot{r}\,\vec{U}_r$$

$d\vec{U}_r$= ??

$$\vec{U}_r = \sin\phi\ \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + r\cos\phi\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{U}_r}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt}$$

$$= \left[-\sin\phi\sin\theta\ \vec{\imath} + \sin\phi\cos\theta\,\vec{\jmath}\right]d\theta + \left[\underbrace{\cos\phi\cos\theta\ \vec{\imath} + \cos\phi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} - \sin\phi\,\vec{k}}_{=\vec{U}_\phi}\right]d\phi$$

$$= sin\phi(\underbrace{-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}}_{=\vec{U}_\theta})\,d\theta + \vec{U}_\phi\,d\phi$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\theta} sin\phi\,\vec{U}_\theta\ + \dot{\phi}\vec{U}_\phi$$

Finalement : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{U}_r + r\,\dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\ + r\,\dot{\phi}\,\vec{U}_\phi$ ....(92)

c) Vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\,\vec{U}_r + r\,\dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\ + r\,\dot{\phi}\,\vec{U}_\phi\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\dot{r}\,\vec{U}_r\right)}{dt} + \frac{d\left(r\,\dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\right)}{dt} + \frac{d\left(r\,\dot{\phi}\,\vec{U}_\phi\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\,(\dot{r})}{dt}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d(\vec{U}_r)}{dt} + \dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\,\frac{d(r)}{dt} + r\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\frac{d(\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta\,\frac{d(sin\phi)}{dt}$$
$$+ r\,\dot{\theta}\,sin\phi\frac{d\left(\vec{U}_\theta\right)}{dt} + \dot{\phi}\,\vec{U}_\phi\frac{d\,(r)}{dt} + r\vec{U}_\phi\frac{d\left(\dot{\phi}\right)}{dt} + r\,\dot{\phi}\,\frac{d\left(\vec{U}_\phi\right)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta} sin\phi\,\vec{U}_\theta\ + \dot{\phi}\,\vec{U}_\phi\right) + \dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_\theta\dot{r} +\ r\,\ddot{\theta} sin\phi\,\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\phi}\ \cos\phi\,\vec{U}_\theta +$$
$$r\,\dot{\theta}\,sin\phi\left(-\dot{\theta}\,sin\phi\,\vec{U}_r - \dot{\theta}\,cos\phi\,\vec{U}_\phi\right) + \dot{\phi}\,\dot{r}\,\vec{U}_\phi +\ r\ddot{\phi}\,\vec{U}_\phi - r\,\dot{\phi}^{\,2}\,\vec{U}_r$$
$$= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\,sin\phi^2\ - r\,\dot{\phi}^{\,2}\right)\vec{U}_r + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} sin\phi + \dot{r}\dot{\theta}\,sin\phi + r\,\ddot{\theta} sin\phi + r\dot{\theta}\,\dot{\phi}\ \cos\phi\right)\vec{U}_\theta$$
$$+ \left(\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\,sin\phi\,cos\phi + \dot{r}\,\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\vec{U}_\phi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\,sin\phi^2\ - r\,\dot{\phi}^{\,2}\right)\vec{U}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta}\,sin\phi + r\,\ddot{\theta} sin\phi + r\dot{\theta}\,\dot{\phi}\ \cos\phi\right)\vec{U}_\theta +$$
$$\left(r\ddot{\phi}\ - r\dot{\theta}^2\,sin\phi\,cos\phi + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\right)\vec{U}_\phi$$ ....(93)

Exercices

Exercice 1 :

Dans un système des coordonnées cartésiennes le point M est repéré par ses coordonnées (x, y).

1) Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.

2) Trouver l'expression de $\vec{u}_\rho$ (vecteur unitaire dans le système des coordonnées polaires) en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cartésiennes).

3) Calculer $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$. Que représente ce vecteur ?

4) Ecrire $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$.

5) Si M se trouve à la position donnée par : $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u}_\rho \\ \theta = \omega t \end{cases}$

Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

Exercice 2 :

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel M dans le système des coordonnées polaires. Le point mobile décrit une trajectoire suivant la loi : $r = r_0 e^{\theta}$ avec une vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

1) Déterminer, dans le système des coordonnées polaires, la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes.

2) Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées intrinsèques (Frenet).

3) Trouver l'expression du rayon de courbure R. Quelle est la valeur de R dans la limite $t \to \infty$? Quelle est la signification physique de ce résultat ?

Exercice 3 : Un point est mobile dans le plan (O,x,y) muni du repère orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A l'instant t ses coordonnées sont : $x(t) = t^2 - 3$ et $y(t) = -t + 2$.

1) Donner l'expression de la trajectoire de M.

2) Donner l'expression de la vitesse et de l'expression de l'accélération de M. Quelle est la nature du mouvement ?

3) Dans un repère de Frenet, déterminer la composante tangentielle de l'accélération puis en déduire la composante normale de l'accélération.

4) Calculer le $(\sin\alpha)$ tel que : $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{v})$.

5) Retrouver l'expression de la composante normale de l'accélération à partir de l'angle α qu'on retrouve aussi entre l'accélération $\vec{a}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_T}$.

Exercice 4 : Les coordonnées d'un point mobile dans le plan (O,x,y) rapporté à un repère orthonormé$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ varient avec le temps suivant : $\begin{cases} x = 2\,cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = 2\,sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$

1) Déterminer la nature de la trajectoire.

2) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.

3) Quelle est la relation entre la vitesse et l'abscisse curviligne S ?

En déduire l'expression de S en fonction du temps en prenant comme condition initiale : $S = 0$ quand $t = 0$.

4) Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

5) La trajectoire reste la même alors que maintenant le point M subit une accélération angulaire $\ddot{\theta} = \frac{d^2\,\theta}{dt^2} = 0{,}2\,t$.

- Quand est ce que le point M atteindra-t-il une vitesse de 10m/s, sachant qu'il est parti du repos.
- Quelle distance a-t-il alors parcouru ?

Exercice 5 : Les composantes du vecteur vitesse d'un mobile M se déplaçant sur un plan sont données par: $v(t)\begin{cases} v_x = \frac{t}{t^2+1} \\ v_y = 2t \end{cases}$

où les conditions initiales du mouvement à $t = 0$ sont : $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.

2) Déterminer les composantes de l'accélération.

<u>Réponses :</u>

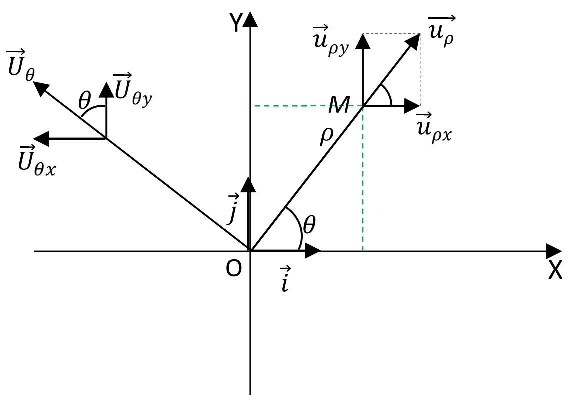
Exercice 1 :

1) En coordonnées polaires :

$OM = \rho$ et $\widehat{xOM} = \theta$

$$cos\,\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{et} \quad sin\,\theta = \frac{y}{\rho}$$

$D'où :$ $\begin{cases} x = \rho\ cos\,\theta \\ y = \rho\ sin\,\theta \end{cases}$



2) $\vec{u}_\rho$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$$\vec{U}_\rho = \vec{U}_{\rho x} + \vec{U}_{\rho y}$$
$$= U_{\rho x}\,\vec{\imath} + U_{\rho y}\,\vec{\jmath}$$

$$\left.\begin{aligned} U_{\rho x} &= \cos\theta \\ U_{\rho y} &= \sin\theta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{U}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

3) $\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = ?$

$$\frac{\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} = \vec{U}_\theta$$

$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

4) $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$:

Puisque $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ constituent deux bases directes alors on peut écrire leur expression sous forme d'une matrice.

$$\begin{pmatrix} & \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ \vec{u}_\rho & \cos\theta & \sin\theta \\ \vec{u}_\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour avoir les expressions de $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ on lie les lignes de la matrice construite et pour avoir les expressions de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ on lie en colonnes, ainsi :

$$\vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{U}_\rho - \sin\theta\,\vec{U}_\theta$$

$$\vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{U}_\rho + \cos\theta\,\vec{U}_\theta$$

5) $\vec{v} = ?$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u}_\rho \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\,t^2\vec{u}_\rho)}{dt} = 2t\,\vec{u}_\rho + t^2\left(\frac{d\,\vec{u}_\rho}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\omega t)}{dt} = \omega$$

$$\vec{v} = 2t\,\vec{u}_\rho + \omega t^2\,\vec{u}_\theta$$

Exercice 2 :

1) La vitesse et l'accélération en coordonnées polaires :

La vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \vec{r} = r_0 e^{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(r_0 e^{\theta}\right)}{dt}\overrightarrow{u_r} + r_0 e^{\theta}\,\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$\frac{d\left(r_0 e^{\theta}\right)}{dt} = r_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)e^{\theta} = r_0\omega\, e^{\theta}$$

$$\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \overrightarrow{u_\theta}\,\omega$$

$$\vec{v} = r_0\omega\, e^{\theta}\overrightarrow{u_r} + r_0\omega\, e^{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

La norme de la vitesse :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(r_0\omega\, e^{\theta})^2 + (r_0\omega\, e^{\theta})^2} \Longrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{2}\, r_0\omega\, e^{\theta}$$

L'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_0\omega\, e^{\theta}\overrightarrow{u_r} + r_0\omega\, e^{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$= \overrightarrow{u_r}\left(\frac{d\left(r_0\omega\, e^{\theta}\right)}{dt}\right) + r_0\omega\, e^{\theta}\left(\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt}\right) + \overrightarrow{u_\theta}\left(\frac{d\left(r_0\omega\, e^{\theta}\right)}{dt}\right) + r_0\omega\, e^{\theta}\left(\frac{d\left(\overrightarrow{u_\theta}\right)}{dt}\right)$$

Sachant qu'en coordonnées polaires, on a :

$\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\,\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\overrightarrow{u_r}$, on obtient :

$$= r_0\omega^2\, e^{\theta}\overrightarrow{u_r} + r_0\omega^2\, e^{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r_0\omega^2\, e^{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r_0\omega^2\, e^{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{a} = 2\, r_0\omega^2\, e^{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

La norme de l'accélération :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(2r_0\omega^2\, e^{\theta})^2} \Longrightarrow \|\vec{a}\| = 2\, r_0\omega\, e^{\theta}$$

2) La vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques (Frenet) :

La vitesse :

Dans un mouvement curviligne, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire donc :

$$\overrightarrow{v_T} = \vec{v} = \sqrt{2}\, r_0\omega\, e^{\theta}\,\overrightarrow{u_T}$$

L'accélération :

$\vec{a} = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N$

$$a_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{2}\,r_0\omega\, e^{\theta}\right)}{dt} \Longrightarrow a_T = \sqrt{2}\,r_0\omega^2\, e^{\theta}$$

$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Longrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2}$

$\vec{a} = 2\,r_0\omega^2\, e^{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \Longrightarrow a^2 = 4\,r_0{}^2\omega^4\, e^{2\theta}$

D'où :

$$a_N = \sqrt{4\,r_0{}^2\omega^4\, e^{2\theta} - 2r_0{}^2\omega^4\, e^{2\theta}} \Longrightarrow a_N = \sqrt{2}\; r_0\omega^2 e^{\theta}$$

3) L'expression du rayon de courbure R:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{a_N} \Longrightarrow R = \frac{\left(\sqrt{2}\,r_0\omega\, e^{\theta}\right)^2}{\sqrt{2}\; r_0\;\omega^2\, e^{\theta}}$$

$$\Longrightarrow R = \sqrt{2}\,r_0\, e^{\theta}$$

Dans ce cas, le mouvement n'est pas circulaire car R dépend de θ (donc de t).

Dans la limite $t \to \infty$:

$$\begin{cases} R = \sqrt{2}\,r_0\, e^{\theta} \\ \theta = \omega t \\ t \to \infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow R \to \infty$$

Dans ce cas le mouvement va tendre vers un mouvement rectiligne.

Exercice 3 :

1) L'expression de la trajectoire de M :

$$\begin{cases} x = t^2 - 3 \\ y = -t + 2 \end{cases} \Longrightarrow y = -t + 2$$

$$\Longrightarrow t = 2 - y$$

$$\Longrightarrow x = (2-y)^2 - 3$$

$$\Longrightarrow y = 2 + \sqrt{x+3}$$

2) L'expression de la vitesse :

$$v = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -1 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \Longrightarrow v = \sqrt{(2t)^2 + (-1)^2}$$

$$\Longrightarrow v = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$$a = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} \Longrightarrow a = \sqrt{(2)^2 + (0)^2}$$

$$\Longrightarrow a = 2$$

La nature du mouvement :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a.v > 0 \end{cases} \Longrightarrow le\ mouvement\ est\ uniformément\ accéléré$$

3) a_T =? et a_N =?

$$a_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{4t^2+1}\right)}{dt} \Longrightarrow \quad a_T = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$$\vec{a} = \ a_T\,\vec{u}_T + \ a_N\,\vec{u}_N$$

$$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Longrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2}$$

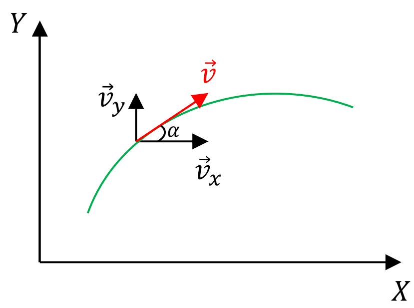
$$\Longrightarrow a_N = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow a_N = \sqrt{\frac{4}{4t^2+1}}$$

4) $sin\,\alpha\ = (\vec{\imath}, \vec{v})$ =?

$$\alpha = (\vec{\imath}, \vec{v}) \Longrightarrow \alpha = (\vec{v}_x, \vec{v})$$

$$\Longrightarrow sin\,\alpha\ = \frac{v_y}{v} = \frac{-1}{\sqrt{4t^2+1}}$$



5) a_N =?

$$sin\,\alpha\ = \frac{a_N}{a} \Longrightarrow a_N = a\ sin\,\alpha$$

$$\Longrightarrow a_N = 2\frac{-1}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$$\Longrightarrow a_N = \frac{-2}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$$\Rightarrow a_N = \sqrt{\frac{4}{4t^2+1}}$$

Exercice 4 :

1) Déterminer la nature de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ y^2 = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on trouve :

$$x^2 + y^2 = 4\left[\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

La trajectoire tracée par le mobile est un cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$

2) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.

$$v = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -2\frac{1}{2}\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow v_x = -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow v_y = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \Rightarrow v = \sqrt{\left[-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2}$$

$$\Rightarrow v = 1$$

3) La relation entre la vitesse et l'abscisse curviligne *S* :

$$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow v\,dt = dS$$

$$\Rightarrow S = \int v\,dt$$

Puisque $v = 1$, alors : $S = \int dt \Rightarrow S = t + c$

à : $t = 0 \ \rightarrow S = 0$

donc: $c = 0$ et $S = t$

4) Les composantes normales et tangentielles de l'accélération a:

$$a_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$$

$$a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$$

$a =?$

$a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 \Longrightarrow a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{1}{2}cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \Longrightarrow {a_x}^2 = \dfrac{1}{4}cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{1}{2}sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \Longrightarrow {a_x}^2 = \dfrac{1}{4}sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

D'où :

$$a = \sqrt{\frac{1}{4}cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

On a trouvé que l'accélération tangentielle est nulle alors :

$$a_N = a = \frac{1}{2}$$

L'accélération totale est purement normale ($a_T = 0$), ce qui indique que le mouvement est circulaire uniforme.

$R = ?$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{a_N} \Longrightarrow R = 2$$

5) Quand $v = 10m/s \rightarrow t = ?$

On donne : $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.2t$

La vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = \int \ddot{\theta}\, dt = \int 0.2t\, dt \Longrightarrow \omega = 0.2 \int t\, dt$

$$\Longrightarrow \omega = 0.1t^2 + c$$

à : $t = 0 \rightarrow s = 0$, alors : $c = 0$

et : $\omega = \dot{\theta} = 0.1t^2$

D'un autre coté : $v = \omega\, R \Longrightarrow v = 0.2\, t^2$

$$\Longrightarrow t = \sqrt{\frac{v}{0.2}}$$

La vitesse atteint sa valeur $v = 10m/s$ à $t = 7.07s$

La distance parcourue S :

$S = R\,\theta$

$$\theta = \int \dot{\theta} dt = \int 0.1\, t^2\, dt \Longrightarrow \theta = \frac{0.1}{3}t^3$$

θ représente l'angle balayé au cours du mouvement.

Enfin :

$$\begin{cases} S = R\,\theta \\ R = 2 \\ \theta = \dfrac{0.1}{3}t^3 \\ t = 7.07 \end{cases} \Longrightarrow S = 23.9\ m$$

Exercice 5 :

$$v(t)\begin{cases} v_x = \frac{t}{t^2+1} \\ v_y = 2t \end{cases}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Longrightarrow \int_1^y dy = \int_0^t v_y\,dt$$

$$\Longrightarrow \int_1^y dy' = \int_0^t 2t\,dt$$

$$\Longrightarrow [y']_1^y = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow y - 1 = t^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_x\,dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{t}{t^2+1}dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$\Longrightarrow [x]_0^x = \frac{1}{2}[ln(t^2+1)]_0^t$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{2}ln(t^2+1)$$

On obtient : $\begin{cases} y = t^2+1 \\ x = \frac{1}{2}ln(t^2+1) \end{cases} \Longrightarrow 2x = ln\,y$

$$\Longrightarrow y = e^{2x}$$

La trajectoire suit une loi exponentielle.

3) Les composantes de l'accélération:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(\frac{t}{t^2+1}\right)}{dt} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2$$

$$a \begin{cases} a_x = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \\ a_y = 2 \end{cases}$$

Chapitre IV

Mouvement relatif

1) Repère absolu et repère relatif:

Considérons un point M dont le mouvement décrit une trajectoire dans l'espace. Par rapport à un certain repère, nous pouvons déterminer sa position, sa vitesse et son accélération. Nous pouvons également choisir un autre repère en mouvement par rapport au premier et y déterminer les mêmes grandeurs (position, vitesse et accélération). On cite l'exemple du voyageur dans un train, qui est en mouvement par rapport à la terre et est immobile par rapport au train.

Soit un repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ fixe par rapport à la terre. Le référentiel terrestre est considéré galiléen lorsque la durée de l'expérience est très inférieure à la période de rotation de la terre.

Soit un autre repère $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ se déplaçant par rapport au repère (R).

Le repère fixe (R) est appelé repère absolu.

Le repère mobile (R') est appelé repère relatif.

Ainsi :

Le mouvement du point M par rapport au repère fixe est dit : mouvement absolu.

Le mouvement du point M par rapport au repère mobile est dit : mouvement relatif.

Le mouvement du repère (R') par rapport au repère fixe (R) est dit : mouvement d'entrainement.

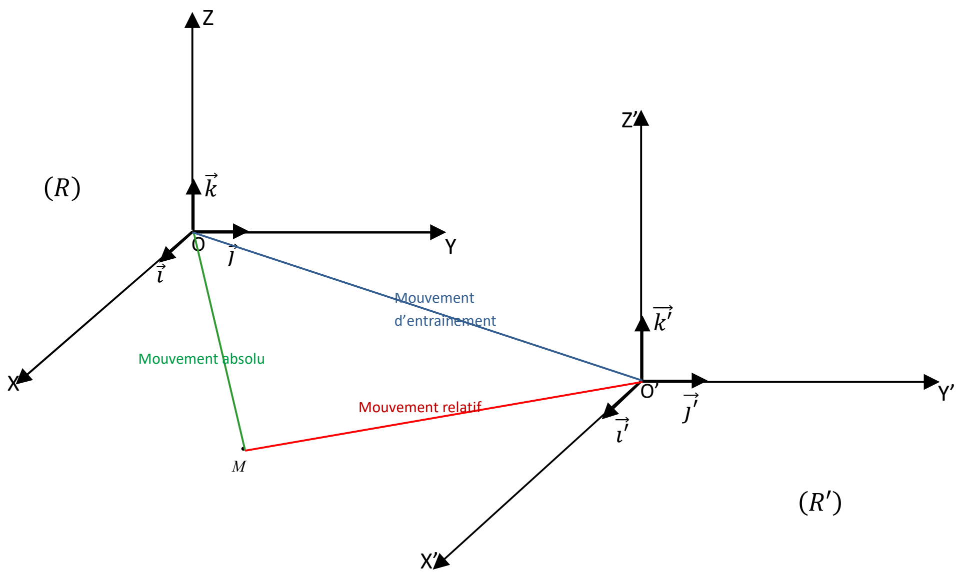


Figure IV.1 : Désignation des mouvements absolu, relatif et d'entrainement par rapport à (R) et (R')

Exemple :

Le mouvement d'un passager se trouvant dans un autocar ; par rapport à un piéton c'est un mouvement absolu ; et par rapport à l'autocar c'est un mouvement relatif.

Puisque le mouvement du point *M* par rapport au repère fixe et par rapport au repère mobile n'est pas le même, les positons, les vitesses et les accélérations se diffèrent. Le tableau **IV.1** englobe les lois générales des vecteurs positons, vitesses et accélérations.

Observateur	Dans le repère absolu *(R)* de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$	Dans le repère relatif *(R')* de vecteurs unitaires $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}$
Position	$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$	$\vec{r'} = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$
Vitesse	$\vec{v_a} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right\vert_{(R)}$	$\vec{v_r} = \left.\frac{d\vec{r'}}{dt}\right\vert_{(R')}$
Accélération	$\vec{a_a} = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right\vert_{(R)}$	$\vec{a_r} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right\vert_{(R')} = \left.\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}\right\vert_{(R')}$

Tableau IV.1 : *Les expressions de la position, la vitesse et l'accélération dans les deux repères absolu et relatif.*

2) Grandeurs absolues :

Ce sont les grandeurs associées au point matériel M calculées dans le repère fixe *(R)* de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ qui sont invariants dans *(R)* c'est-à-dire :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right\vert_{(R)} = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right\vert_{(R)} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right\vert_{(R)} = \vec{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(94)$$

Et certainement :

$$\left.\frac{d^2\vec{\imath}}{dt^2}\right\vert_{(R)} = \left.\frac{d^2\vec{\jmath}}{dt^2}\right\vert_{(R)} = \left.\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right\vert_{(R)} = \vec{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(95)$$

2.1) Position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(96)$$

2.2) Vitesse absolue :

$$\vec{v_a} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(97)$$

2.3) Accélération absolue :

$$\vec{a_a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \text{..................................(98)}$$

3) Grandeurs relatives :

Ce sont les grandeurs associées au point matériel M calculées dans le repère relatif mobile *(R')* de vecteurs unitaires $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ qui sont invariants dans (R') c'est-à-dire :

$$\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_{(R')} = \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_{(R')} = \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{(R')} = \vec{0} \quad \text{.......................(99)}$$

Et certainement :

$$\left.\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}\right|_{(R')} = \left.\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}\right|_{(R')} = \left.\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right|_{(R')} = \vec{0} \quad \text{................(100)}$$

3.1) Position :

$$\vec{r'} = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \quad \text{.......................(101)}$$

3.2) Vitesse relative :

$$\vec{v_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} \quad \text{.........................(102)}$$

3.3) Accélération relative :

$$\vec{a_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} \quad \text{.....................(103)}$$

4) Relation entre les grandeurs absolues et les grandeurs relatives :

4.1) Relation entre les positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad \text{..............................(104)}$$

Ou :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

4.2) Relation entre les vitesses :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} + \left.\frac{d\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\bigg|_{(R)} + \vec{i'}\left(\frac{dx'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + x'\frac{d\,\vec{i'}}{dt}\bigg|_{(R)} + \vec{j'}\left(\frac{dy'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + y'\frac{d\,\vec{j'}}{dt}\bigg|_{(R)} + \vec{k'}\left(\frac{dz'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + z'\frac{d\,\vec{k'}}{dt}\bigg|_{(R)}$$

On pose :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\bigg|_{(R)} + x'\frac{d\,\vec{i'}}{dt}\bigg|_{(R)} + y'\frac{d\,\vec{j'}}{dt}\bigg|_{(R)} + z'\frac{d\,\vec{k'}}{dt}\bigg|_{(R)} \quad \text{.............(105)}$$

$\overrightarrow{v_e}$ appelée vitesse d'entrainement ; c'est la vitesse du repère relatif mobile par rapport au repère fixe.

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{i'}\left(\frac{dx'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + \vec{j'}\left(\frac{dy'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + \vec{k'}\left(\frac{dz'}{dt}\right)\bigg|_{(R)} \quad \text{....................(106)}$$

$\overrightarrow{v_r}$ appelée vitesse relative est la vitesse du point M dans le repère relatif mobile.

Et sachant que : $\overrightarrow{v_a}$ la vitesse absolue est la vitesse du point M dans le repère fixe, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{(R)}$$

On aura :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \quad \text{...............................(107)}$$

Cette relation s'appelle la loi de décomposition des vitesses.

Cas particuliers :

i. Dans le cas où le point M est fixe dans le repère *(R')* alors $\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$, d'où : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e}$.

ii. Dans le cas où *(R')* est fixe par rapport à *(R)*alors $\overrightarrow{v_e} = \vec{0}$, d'où : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$.

4.3) Relation entre les accélérations :

La vitesse absolue s'écrit :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{(R)} \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

Avec :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{(R)} = \left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{i'}\bigg|_{(R)} + x'\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\vec{j'}\bigg|_{(R)} + y'\left(\frac{d\,\vec{j'}}{dt}\right)\bigg|_{(R)} + \left(\frac{dz'}{dt}\right)\vec{k'}\bigg|_{(R)} + z'\left(\frac{d\,\vec{k'}}{dt}\right)\bigg|_{(R)}$$

Et puisque l'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue, $\overrightarrow{a_a}$ se calcule comme suit :

$$\overrightarrow{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{(R)} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{(R)}$$

$$= \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\vec{i'}\right|_{(R)} + x'\left.\left(\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)\right|_{(R)}$$

$$+ \left.\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\vec{j'}\right|_{(R)} + y'\left.\left(\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)\right|_{(R)}$$

$$+ \left.\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\vec{k'}\right|_{(R)} + z'\left.\left(\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right|_{(R)}$$

$$= \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} + x'\left.\left(\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}\right)\right|_{(R)} + y'\left.\left(\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}\right)\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\vec{i'}\right|_{(R)}$$

$$+ \left.\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\vec{j'}\right|_{(R)} + \left.\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\vec{k'}\right|_{(R)}$$

$$+ 2\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right) + \left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right]_{(R)}$$

On pose :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}\right) + y'\left(\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}\right) + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(108)$$

$\overrightarrow{a_e}$ est dite accélération d'entrainement .

$$\overrightarrow{a_r} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\vec{i'} + \left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\vec{j'} + \left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\vec{k'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(109)$$

$\overrightarrow{a_r}$ est dite accélération relative.

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right) + \left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots(110)$$

$\overrightarrow{a_c}$ est dite l'accélération de Coriolis .

Ainsi :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(111)$$

Cas particulier :

Dans le cas où le point *M* est fixe dans le repère *(R')* alors :

$\frac{dx\prime}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz\prime}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = \vec{0}$

5. Mouvement d'un repère (R') par rapport à un autre fixe (R):

Le mouvement de (R') par rapport à (R) peut être soit un mouvement de translation soit un mouvement de rotation.

5.1) Cas du mouvement de translation :

Si *(R')* est en mouvement de translation (uniforme ou varié) par rapport à *(R),* les vitesses absolues et d'entrainement conserveront leurs expressions, cependant celle de la vitesse d'entrainement change.

Dans le mouvement de translation les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ sont astreints à rester constants ; ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont nulles.

i. $\left.\frac{d\vec{\imath\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{\jmath\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{k\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

Ainsi : $\overrightarrow{v_e}$ est indépendante de *M.*

ii. $\left.\frac{d\vec{\imath\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{\jmath\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{k\prime}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = 0$

iii. $\left.\frac{d^2\vec{\imath\prime}}{dt^2}\right|_{(R)} = \left.\frac{d^2\vec{\jmath\prime}}{dt^2}\right|_{(R)} = \left.\frac{d^2\vec{k\prime}}{dt^2}\right|_{(R)} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$

Dans ce cas : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}$

5.2) Cas du mouvement de rotation :

On considère le cas le plus simple des mouvements de rotation ; en effet, on suppose que le repère (R') est en mouvement de rotation par rapport à (R) autour de l'axe perpendiculaire (OZ). Soit M un point de (R') qui tourne autour de (OZ).

M est repéré dans (R) par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

La trajectoire de *M* est un cercle de rayon $L = \overrightarrow{CM}$.

On note $\vec{v}$ la vitesse linéaire de *M*,

Ainsi : $\vec{v} \perp \overrightarrow{CM}$ et $\vec{v} \perp \vec{r}$. (voir figure IV.2)

De plus, puisque M est dans le plan (XOY) ; alors $\vec{v}$ est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{k}$.

On en déduit que $\vec{v} \perp \vec{k}$.

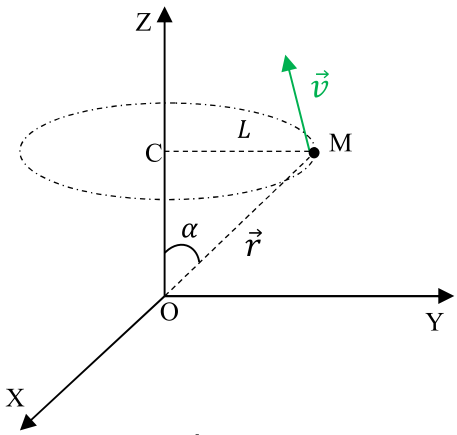


Figure IV.2 : (R') en rotation par rapport à (R)

5.2.1) Vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l} On\ a : \sin\alpha = \dfrac{L}{r} \Longrightarrow L = r \sin\alpha \\ Et\ on\ sait\ que : v = \omega L \end{array}\right\} \Longrightarrow v = \omega\, r\, \sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (112)$$

$\vec{\omega}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{v}$; donc perpendiculaire à $\overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire que $\vec{\omega}$ est suivant $\vec{k}$.

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{k} \qquad (113)$$

Si on s'intéresse au mouvement du point M dans le plan (XOY), ce dernier est curviligne d'abscisse θ .

$$\theta = \frac{S}{R} \Longrightarrow d\theta = \frac{dS}{R}$$

$$\Longrightarrow dS = L\, d\theta$$

Par ailleurs :

$$v = \frac{dS}{dt} \Longrightarrow v = \frac{L\, d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{v}{L} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

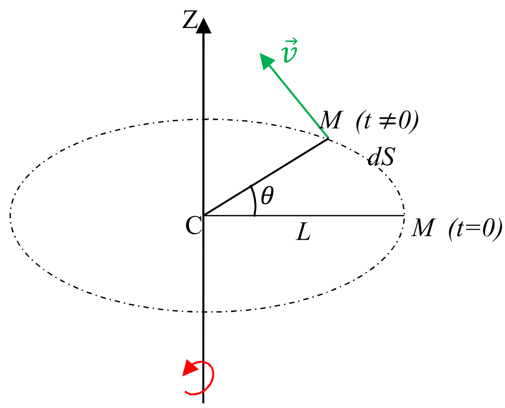


Figure IV.3 : Evolution de la position de rotation de (R')

Finalement :

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\, \vec{k} \qquad (114)$$

5.2.2) Expressions des vitesses dans un mouvement de rotation :

Sachant que dans le repère *(R)*, le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$, la vitesse absolue est :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \text{.......................................(115)}$$

Et sachant que dans *(R')*, le vecteur position s'écrit $\vec{r}' = \overrightarrow{OM'} = x'\vec{\imath}' + y'\,\vec{\jmath}' + z'\overrightarrow{k'}$, la vitesse relative est :

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\vec{r}\prime}{dt} = \frac{dx\prime}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \text{....................................(116)}$$

La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ qui s'écrit sous sa forme générale connue en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$ et $\vec{k}'$ va s'écrire dans le mouvement de rotation en fonction de la vitesse angulaire ω. En fait, les vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$ et $\vec{k}$ ne sont pas constants par rapport à *(R)* ; ils effectuent un mouvement circulaire uniforme par rapport à O, avec une vitesse angulaire ω.

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\left.\frac{d\,\vec{\imath}'}{dt}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d\,\vec{\jmath}'}{dt}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d\,\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}$$

En suivant le même raisonnement que l'équation (112), on aura :

$$\frac{d\,\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}' \qquad \frac{d\,\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}' \qquad \frac{d\,\vec{k}\prime}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'}$$

Il en résulte que :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}') + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}') + z'(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'})$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge x'\vec{\imath}') + (\vec{\omega} \wedge y'\vec{\jmath}') + (\vec{\omega} \wedge z'\overrightarrow{k'})$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\overrightarrow{k'})$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{r'}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \text{..(117)}$$

La loi de décomposition des vitesses devient dans le cas de la rotation :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \frac{d\overrightarrow{OO}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \text{ ....(118)}$$

5.2.3) Expressions des accélérations dans un mouvement de rotation :

L'accélération du point *M* dans le repère *(R)* est appelée l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.

$$\overrightarrow{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{(R)} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}$$

Or, on a trouvé dans le cas de la rotation que : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

En conséquence :

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\,\overrightarrow{v_r}}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(119)$$

L'accélération du point *M* dans le repère *(R')* est appelée l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$.

$$\overrightarrow{a_r} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{(R')} = \frac{d^2x'}{dt^2}\,\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}$$

L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ qui s'écrit sous sa forme générale connue en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$et $\vec{k}'$ va s'écrire dans le mouvement de rotation en fonction de la vitesse angulaire ω.

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right) + y'\left(\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right) + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

On a démontré que : $\frac{d\,\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}'$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\imath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\imath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right)\right] + y'\left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\jmath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right)\right]$$
$$+ z'\left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right]$$
$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'\vec{\imath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right)\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y'\vec{\jmath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right)\right]$$
$$+ \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z'\vec{k}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right]$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left[\left(x'\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right) + \left(y'\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) + \left(z'\vec{\omega} \wedge \vec{k}'\right)\right] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right)\right] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots(120)$$

L'accélération de Coriolis, elle aussi va s'écrire en fonction de la vitesse de rotation $\vec{\omega}$.

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right) + \left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right) + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) + \frac{dz'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}'\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\vec{\omega} \wedge \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}'\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)\right]$$

$$= 2\left[\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(121)$$

Aussi, en utilisant la loi de décomposition des accélérations :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_c}$$

On aura dans le cas de rotation :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

Et si en plus la rotation est uniforme :

$$\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

D'où :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} \ldots\ldots\ldots\ldots(122)$$

Exercices

Exercice 1 :

Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8Km/s$. Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant horizontalement à $50Km/h$?

1) Calculer la vitesse des flocons de neige par rapport à la voiture.

2) En déduire l'angle α entre la vitesse absolue et la vitesse relative.

Exercice 2 :

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille M sans vitesse initiale. On lie à l'immeuble un référentiel $R(OXZ)$ par rapport auquel la bille effectue un mouvement vertical uniformément variable d'accélération $-g\vec{k}$. (Figure 1)

1) Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la bille.

2) Un vélo se déplace suivant l'axe horizontal selon un mouvement rectiligne uniforme et passe par la verticale au moment du lâcher de la bille.

a. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille par rapport au référentiel du vélo $R'(O'X'Z')$.

b. Calculer la vitesse de la bille par rapport au vélo et par rapport au sol. En déduire la vitesse du vélo par rapport au sol.

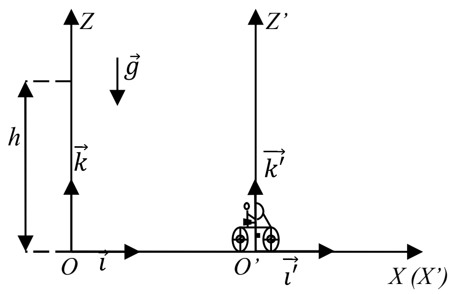


Figure 1

Exercice 3 :

Soit un repère mobile $R'(o', x', y', z')$ en mouvement par rapport à un autre fixe $R(o, x, y, z)$ avec une vitesse $v_e = (1, 0, 0)$.

On suppose que x', y' et z' sont les coordonnés d'un point matériel M dans le repère R' tel que : $\begin{cases} x' = 6t^2 + 3t \\ y' = -3t^2 \\ z' = 3 \end{cases}$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, M est à la position $O(0, 0, 0)$ dans le repère fixe R.

1) Déterminer la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue.

2) En déduire les coordonnés du point M dans le repère fixe R.

3) Déterminer les accélérations relative et absolue du point M.

Exercice 4 :

Dans un repère fixe $R(0, x, y, z)$ un point O' se déplace sur l'axe (Oz) avec une accélération constante et sans vitesse initiale. Un autre repère $R'(O', x', y', z')$ est lié à O', et tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. (Figure 2).

Un point P se déplace avec une vitesse constante v_0 sur l'axe $(O'x')$. A *t=0*, le point P coïncide avec O' et l'axe $(O'x')$ avec (Ox).

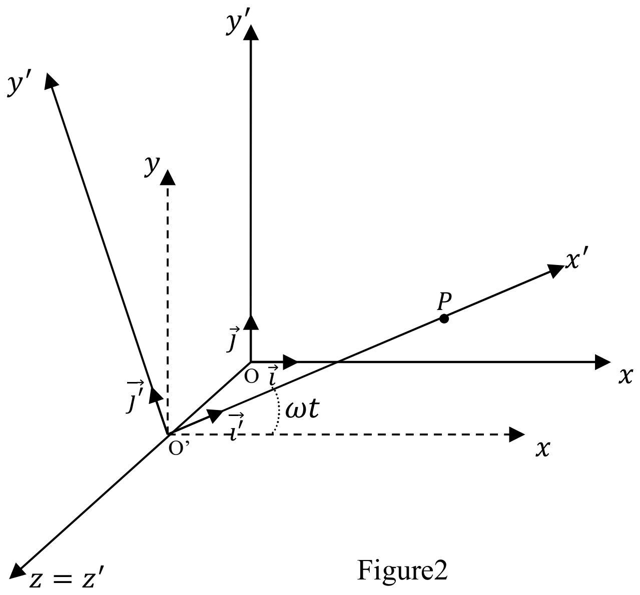


Figure2

1) Donner les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{O'P}$ et $\overrightarrow{OP}$ dans le repère *(R')*.

2) Déterminer la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$ du point P.

3) Déterminer la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ et l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$.

4) En déduire la vitesse absolue dans (R') ensuite dans (R).

5) Déterminer l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$ dans (R').

Exercice 5 :

On considère deux référentiels $R(Oxyz)$ et $R'(O'x'y'z')$ de bases $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$. Le référentiel R' tourne autour de (Oz) à la vitesse angulaire constante ω. Un point M est mobile sur (Oy')(Figure 3), son vecteur position suit la loi : $OM = r_0 \cos \omega t$..

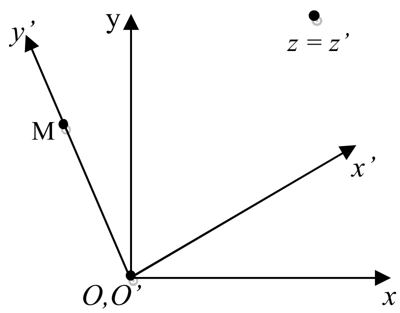


Figure3

1) Déterminer les vitesses relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ du point M.

2) Déterminer la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

En déduire l'angle φ défini comme $\varphi = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_a})$.

3) Déterminer les accélérations relative $\overrightarrow{a_r}$; d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$; de coriolis $\overrightarrow{a_c}$ et absolue $\overrightarrow{a_a}$ dans R'.

4) En déduire l'angle $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{a_a})$.

Réponses :

Exercice 1 :

La vitesse des flocons de neige par rapport à la voiture est la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$.

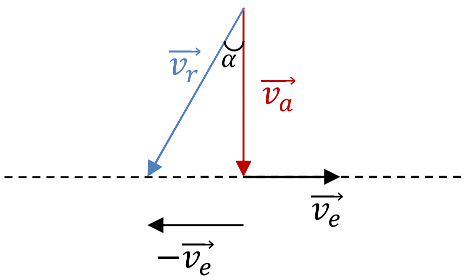
La vitesse des flocons de neige par rapport au sol est la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a} = 8Km/s$.

La vitesse de la voiture par rapport au sol est la vitesse $\overrightarrow{v_e} = 50Km/h$.

1) La vitesse des flocons de neige par rapport à la voiture

on utilise la loi de décomposition des vitesses :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Longrightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_e}$$



$$\Longrightarrow |\overrightarrow{v_r}| = \sqrt{\overrightarrow{v_a}^2 + \overrightarrow{v_e}^2}$$

$$\Longrightarrow |\overrightarrow{v_r}| = 16m/s$$

2) $\alpha = (\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_r}) = ?$

$$tan\,\alpha = \frac{v_e}{v_a} = 1.74 \Longrightarrow \alpha = 60°$$

Ou bien :

$$sin\,\alpha = \frac{v_e}{v_r} = 0.86 \Longrightarrow \alpha = 60°$$

Exercice 2 :

1) Le vecteur position de la bille par rapport au référentiel (R):

Le mouvement de la bille par rapport au référentiel (R) de l'immeuble est un mouvement uniformément variable d'équation :

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\,gt^2\vec{k} \qquad /(R)$$

2) Au moment où on lâche la bille, le vélo se trouve à la position $O(0,0)$, ce qui explique que les deux origines O, O' sont confondues.

De plus : $(OZ)//(OZ') \Longrightarrow \vec{k} = \vec{k'}$ et $\vec{\imath} = \vec{\imath'}$

a. Le vecteur position de la bille par rapport au référentiel (R'):

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Longrightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{OO'} = ?$

Le mouvement du vélo est uniforme par rapport au sol :

$$x = vt + x_0 \Longrightarrow \overrightarrow{OO'} = vt\vec{\imath}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{OO'} = vt\vec{\imath'}$$

$$\overrightarrow{O'M} = -\frac{1}{2}gt^2\vec{k'} - vt\vec{\imath'} \quad /(R')$$

b. La vitesse de la bille par rapport au vélo :

La vitesse de la bille par rapport au vélo, c'est la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = -v\vec{\imath'} - gt\vec{k'}$$

La vitesse de la bille par rapport au sol, c'est la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -gt\vec{k'} = -gt\vec{k}$$

Enfin la vitesse du vélo par rapport au sol est la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Longrightarrow \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{v_e} = v\vec{\imath'}$$

Exercice 3 :

$\vec{v}_e = \vec{\imath'}$

$R//R' \Longrightarrow \vec{\imath} = \vec{\imath'},\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath'},\ \vec{k} = \vec{k'}$

$\overrightarrow{O'M} = (6t^2 + 3t)\vec{\imath'} - 3t^2\vec{\jmath'} + 3\vec{k'}$

1) La vitesse relative et la vitesse absolue de M :

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\left((6t^2 + 3t)\vec{\imath'} - 3t^2\vec{\jmath'} + 3\vec{k'}\right)}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{v_r} = (12t + 3)\vec{\imath'} - 6t\vec{\jmath'}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = (12t + 3)\vec{\imath'} - 6t\vec{\jmath'} + \vec{\imath'} \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = (12t + 4)\vec{\imath'} - 6t\vec{\jmath'}$$

2) Les coordonnés du point M dans le repère fixe R :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Longrightarrow \begin{cases} v_{ax} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_{ay} = \dfrac{dy}{dt} \\ v_{az} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_{ax} = \displaystyle\int (12t+3)\,dt = 6\,t^2 + 4t + C_1 \\ v_{ay} = \displaystyle\int -6t\,dt = -3\,t^2 + C_2 \\ v_{az} = \displaystyle\int 0\,dt = C_3 \end{cases}$$

A $t = 0$: $x = y = z = 0$ d'où : $C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$\overrightarrow{OM} = (6\,t^2 + 4t)\vec{\imath} - 3\,t^2\vec{\jmath}$

3) Les accélérations relative et absolue :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d^2\left((6t^2 + 3t)\vec{\imath'} - 3t^2\vec{\jmath'} + 3\vec{k'}\right)}{dt^2} \Longrightarrow \overrightarrow{a_r} = 12t\,\vec{\imath'} - 6\vec{\jmath'}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\left((6t^2 + 4t)\vec{\imath} - 3t^2\vec{\jmath'}\right)}{dt^2} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = 12t\,\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$$

Exercice 4 :

1) L'expression de $\overrightarrow{O'P}$ et $\overrightarrow{OP}$ dans le repère *(R')*

Le mouvement de P sur l'axe (O'x')est uniforme, alors : $\overrightarrow{O'P} = v_0 t\,\vec{\imath'}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$

$\overrightarrow{OO'} = ?$

O'se déplace sur (Oz) avec une accélération constante et sans vitesse initiale, son mouvement est donc uniformément variable. $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}at^2\vec{k}$

Et puisque *(R')* tourne autour de (Oz) alors : $\vec{k} = \vec{k'}$

D'où : $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}at^2\vec{k'}$

Enfin : $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}at^2\vec{k'} + v_0 t\,\vec{\imath'} \qquad /(R')$

2) La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$ de P

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\,\overrightarrow{O'P}}{dt} = \frac{d\,(v_0 t)\,\vec{\imath'}}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{v_r} = v_0\,\vec{\imath'}$$

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\,\overrightarrow{O'P}}{dt^2} = \vec{0}$$

3) La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ et l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$.

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$$\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} = a\,t\,\vec{k} = a\,t\,\overrightarrow{k'}$$

$$\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\iota'} & \overrightarrow{\jmath'} & \overrightarrow{k'} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{\jmath'}$$

Alors :

$$\overrightarrow{v_e} = \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{\jmath'} + a\,t\,\overrightarrow{k'}$$

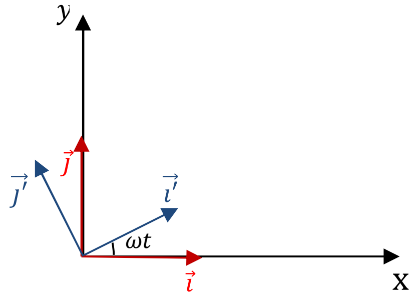
$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = a\overrightarrow{k'} \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \\ \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\iota'} & \overrightarrow{\jmath'} & \overrightarrow{k'} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, v_0 t & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\, v_0 t\, \overrightarrow{\iota'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{a_e} = -\omega^2\, v_0 t\, \overrightarrow{\iota'} + a\,\overrightarrow{k'}$$

4) La vitesse absolue dans (R')ensuite dans (R)

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_a} = v_0\, \overrightarrow{\iota'} + \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{\jmath'} + a\,t\,\overrightarrow{k'} \qquad /(R')$$

Pour trouver l'expression de $\overrightarrow{v_a}$ dans le repère absolu, il faut écrire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\iota'}$, $\overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'}$ en fonction de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}, \vec{k}$.



Sachant déjà que $\vec{k} = \overrightarrow{k'}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\iota'} = \cos\omega t\, \vec{\imath} + \sin\omega t\, \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\jmath'} = -\sin\omega t\, \vec{\imath} + \cos\omega t\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_a} = v_0\,(\cos\omega t\, \vec{\imath} + \sin\omega t\, \vec{\jmath}) + \omega\, v_0 t\,(\sin\omega t\, \vec{\imath} + \cos\omega t\, \vec{\jmath}) + a\,t\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_a} = (v_0 \cos\omega t - v_0 \omega t \sin\omega t)\vec{\imath} + (\sin\omega t + v_0 \omega t \cos\omega t)\vec{\jmath} + at\vec{k} \qquad /(R)$$

5) L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = 2v_0\omega\ \vec{j'}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = -\omega^2\ v_0 t\ \vec{i'}\ + 2v_0\omega\ \vec{j'} + a\ \vec{k'}$$

Exercice 5 :

On remarque que O'est confondu avec O ce qui indique que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M}$

alors : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} = r_0 \cos\omega t\, \vec{j'}$

1) Les vitesses relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\,(r_0 \cos\omega t)\,\vec{j'}}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{v_r} = -r_0\,\omega\,\sin\omega t\,\vec{j'}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0} \\ \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0 \cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = -\,r_0\,\omega\,\cos\omega t\ \vec{i'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{v_e} = -\,r_0\,\omega\,\cos\omega t\ \vec{i'}$$

2) La vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$ et l'angle $\varphi = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_a}\ )$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = -\,r_0\,\omega\,\cos\omega t\ \vec{i'} - r_0\,\omega\,\sin\omega t\,\vec{j'} \qquad /(R')$$

$$\begin{cases} \vec{i'} = \cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j} \\ \vec{j'} = -\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_a} = -\,r_0\,\omega\,\cos\omega t\ \ (\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}) - r_0\,\omega\,\sin\omega t\,(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})$$

$$\overrightarrow{v_a} = (-\,r_0\,\omega\,\cos^2\omega t + r_0\,\omega\,\sin^2\omega t)\vec{i} + \ (r_0\,\omega\,\cos\omega t\,\sin\omega t - r_0\,\omega\,\cos\omega t\,\sin\omega t)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \ r_0\,\omega\ \vec{i} \qquad /(R)$$

$$\varphi = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_a}\right) = ?$$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v_a} = \left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{v_a}\right|.\cos\varphi \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_a}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{v_a}\right|}$$

On choisit une base commune entre $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v_a}$, soit c'est $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ou $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$.

On opte pour (R') donc avec les vecteurs unitaires $\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'$.

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \cos \omega t\, \vec{\jmath}' \Longrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = r_0 \cos \omega t$$

$$\overrightarrow{v_a} = -\, r_0\, \omega \cos \omega t\, \vec{\imath}' - r_0\, \omega \sin \omega t\, \vec{\jmath}' \Longrightarrow |\overrightarrow{v_a}| = \sqrt{(r_0\, \omega \cos \omega t)^2 + (r_0\, \omega \sin \omega t)^2}$$

$$\Longrightarrow |\overrightarrow{v_a}| = r_0 \omega$$

$$\cos\varphi = \frac{(r_0 \cos \omega t\, \vec{\jmath}'),(-\, r_0\, \omega \cos \omega t\, \vec{\imath}' - r_0\, \omega \sin \omega t\, \vec{\jmath}')}{r_0 \cos \omega t\, .\, r_0 \omega} \Longrightarrow \cos\varphi = -\sin \omega t$$

A cette étape, on fait appel aux relations trigonométriques, en l'occurrence le passage de la fonction sinus à la fonction cosinus et inversement.

$\sin \alpha + \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$

$\cos \alpha + \frac{\pi}{2} = -\sin \alpha$: c'est cette relation qu'on va utiliser

$$\cos\underbrace{\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right)}_{=\,\varphi} = -\sin \omega t \Longrightarrow \varphi = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

3) Les accélérations $\overrightarrow{a_r}$; $\overrightarrow{a_e}$; $\overrightarrow{a_c}$ $\overrightarrow{a_a}$ dans R'

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0} \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \\ \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0 \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = -r_0 \cos \omega t\ \vec{\imath}' \\ \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -r_0 \cos \omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r_0 \omega^2 \cos \omega t\ \vec{\jmath}' \end{cases}$$

Finalement :

$$\overrightarrow{a_e} = -r_0 \omega^2 \cos \omega t\ \vec{\jmath}'$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \vec{\imath'} & \vec{\jmath'} & \vec{k'} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -r_0\omega \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = 2r_0\omega^2 \ \sin \omega t \ \vec{\imath'}$$

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\,\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d^2\left(r_0 \cos \omega t \ \vec{\jmath'}\right)}{dt^2} \Longrightarrow \overrightarrow{a_r} = -r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = -r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'} - r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'} + 2r_0\omega^2 \ \sin \omega t \ \vec{\imath'}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = 2r_0\omega^2 \ \sin \omega t \ \vec{\imath'} - 2r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'}$$

4) En déduire l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{a_a}\right)$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{a_a} = \left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{a_a}\right|.\cos \theta \Longrightarrow \ \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{a_a}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{a_a}\right|}$$

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \cos \omega t \,\vec{\jmath'} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = r_0 \cos \omega t$$

$$\overrightarrow{a_a} = 2r_0\omega^2 \ \sin \omega t \ \vec{\imath'} - 2r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{a_a}\right| = 2r_0\omega^2$$

$$\cos \theta = \frac{\left(r_0 \cos \omega t \,\vec{\jmath'}\right).\left(2r_0\omega^2 \ \sin \omega t \ \vec{\imath'} - 2r_0\omega^2 \cos \omega t \ \vec{\jmath'}\right)}{r_0 \cos \omega t \ . \ 2r_0\omega^2} \Longrightarrow \cos \theta = -\cos \omega t$$

$$\Longrightarrow \ \cos\left(\omega t + \pi\right) = -\cos \omega t$$

Finalement : $\theta\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{a_a}\right) = \ \omega t + \pi$

Chapitre V

Dynamique

1) Introduction :

La dynamique est la branche de mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes (forces) qui les produisent car une particule se met en mouvement ou s'arrête de se mouvoir sous l'action d'une force.

Le mouvement est décrit par une accélération qui est le résultat de l'application de la force. La relation entre l'interaction (force-corps) et l'accélération a été énoncée par ***Isaac Newton*** (1642-1727) en 1686. Par rapport à la cinématique qui tient en compte uniquement l'espace et le temps, la dynamique de Newton considère deux notions fondamentales à savoir *la masse* et *la force*.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à résoudre un problème de dynamique. Pour cela, il est très important de savoir faire le bilan des forces qui agissent sur un système mécanique prédéfini.

2) Définitions :

2.1) La force :

C'est une action mécanique exercée par un acteur sur un objet appelé receveur. Lorsqu'une force est appliquée sur un corps, elle modifie la vitesse du corps, soit en valeur, en direction, ou les deux à la fois. La force est donc une grandeur vectorielle caractérisée par :

- Le sens qui précise vers où la force agit.
- La direction c'est la droite d'action.
- L'intensité ou la norme.
- Le point d'application qui est l'endroit où la force s'exerce.

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire, si la force et le mouvement sont dans le même sens la force est dite *motrice* sinon c'est une force *résistante*.

2.2) Système matériel :

On appelle un système matériel un ensemble de points matériels. On distingue deux types de systèmes matériels :

Le système matériel indéformable : dans lequel tous les points matériels sont fixes les uns par rapport aux autres, c'est le cas d'un solide métallique.

Le système matériel déformable : dans lequel au moins quelques points matériels sont mobiles les uns par rapport aux autres. C'est le cas de deux solides sans lien entre eux qui se déplacent indépendamment l'un de l'autre.

2.3) Système matériel isolé :

Lorsque le système matériel ne subit aucune action extérieure, il est dit *isolé* ou *fermé*. C'est le cas d'un solide seul dans l'espace loin de toute autre masse.

Si le système subit des actions extérieures qui se compensent, alors le système est pseudo-isolé, et tout se passe comme s'il était isolé.

Sur la terre, il n'est pas possible qu'un système soit isolé, car l'action de la terre est représentée par le poids (attraction de la terre) est une action extérieure.

2.4) La masse et le centre d'inertie d'un système matériel :

- La masse d'un système matériel est la quantité de matière qui le constitue. En mécanique newtonienne, la masse est une caractéristique du système, elle est donc invariable et conservée.
- Le centre d'inertie d'un système matériel ou centre de gravitation correspond à un point dit barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse.

Soit un système matériel constitué de N points matériels M_i $(i = 1, 2, \dots N)$ de masses $m_i(i = 1, 2, \dots N)$; dans un référentiel défini le centre d'inertie G vérifie la relation :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad \text{……………………………………………(123)}$$

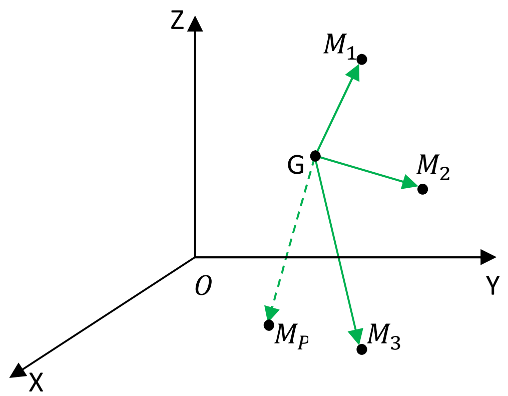


Figure V.1 : Centre d'inertie d'un système matériel

En prenant le centre du référentiel le point O, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM_\iota}\right)=\vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GO}+\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_\iota}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_\iota}=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OG}$$

Comme $\overrightarrow{OG}$ ne dépend pas de i, on peut le sortir de la somme.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_\iota}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_\iota}}{m}\text{……………………..........(124)}$$

2.5) Quantité de mouvement :

On considère deux points matériels de masses différentes se déplaçant à la même vitesse. Les mouvements des deux points vont être différents puisqu'un mouvement dépend non seulement de la vitesse mais aussi de sa masse.

Pour expliquer cette différence, on introduit une grandeur vectorielle appelée la *quantité de mouvement* ou *impulsion* $\vec{P}$ et qui est définie dans un référentiel donné par :

$$\vec{P}=m\vec{v}\text{ ……..(125)}$$

Où m est la masse du point matériel et $\vec{v}$ sa vitesse.

Pour un système matériel constitué de N points matériels de masses m_i et se déplaçant avec des vitesses $\vec{v_\iota}$, avec $(i=1,2,\dots N)$, la quantité de mouvement est :

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{N} P_i=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v_\iota}\Rightarrow \vec{P}=\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\,\overrightarrow{OM_\iota}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{P}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_\iota}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{P}=\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{P}=m\,\overrightarrow{v_G}\text{……...(126)}$$

$\sum_{i=1}^{N} m_i=m$: La masse du système et $\overrightarrow{v_G}$ est la vitesse du centre d'inertie du système.

L'équation (126) stipule que la quantité de mouvement totale du système est égale à la quantité de mouvement de son centre d'inertie G affectée de la *masse totale*

3) Lois fondamentales de la dynamique :

Il est utile de rappeler qu'il existe en physique quelques principes qu'on ne démontre pas mais qu'on les vérifie expérimentalement. Ces principes demeurent justes et valables tant qu'il n'existe pas d'expériences qui les contestent et les contredisent.

3.1) Principe d'inertie - première loi de Newton :

3.1.1) Enoncé :

Dans un référentiel Galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé (pas de forces extérieures) est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme. Ce principe se résume en la relation suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \qquad (127)$$

Plus clairement, si la somme des forces agissant sur un corps est nulle :

- Le corps qui est au repos demeure au repos.
- Le corps qui est en mouvement continue de se mouvoir en mouvement rectiligne uniforme.

Application :

Soit le mouvement d'un système isolé de masse constante m dans un référentiel galiléen. La vitesse du centre d'inertie du système est constante, elle est notée : $\overrightarrow{v_G}$.

La quantité de mouvement du système : $\vec{P} = m\overrightarrow{v_G}$.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\ m\overrightarrow{v_G}}{dt} \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} + \overrightarrow{v_G}\frac{dm}{dt}$$

Or :

$\frac{d\,\overrightarrow{v_G}}{dt} = 0$; car la vitesse $\overrightarrow{v_G}$ est constante.

$\frac{d\,m}{dt} = 0$; car la masse m est constante.

D'où :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \qquad (128)$$

Ce résultat explique qu'en appliquant le principe d'inertie, on démontre que la quantité de mouvement est conservée.

3.1.2) Référentiel galiléen : Appelé aussi référentiel inertiel car c'est le principe d'inertie qui permet de définir ce qu'est ce référentiel. En fait, il s'agit de tout référentiel où le principe d'inertie s'applique.

D'une part, l'accélération d'un point matériel isolé est nulle dans un référentiel galiléen (principe d'inertie). D'une autre part, l'accélération du point matériel sera nulle aussi dans tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen. En combinant ces deux indices, il en résulte que :

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

3.1.3) Quelques référentiels galiléens :

- Référentiel de Copernic

Il a pour origine le centre de masse du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

- Référentiel de Kepler :

Son origine est le centre de masse du soleil et ses axes pointent vers trois étoiles éloignées pour paraitre immobiles.

- Référentiel terrestre :

C'est le plus utilisé, son origine est un point de la terre et ses axes sont liés à la rotation terrestre donc fixes par rapport à elle.

3.2) Principe fondamental de la dynamique - deuxième loi de Newton :

Lorsqu'un système n'est pas isolé, il subit des actions de l'extérieur qui vont modifier son mouvement en variant sa quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$.

Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ d'un système, en chaque instant est égale à la résultante des forces extérieures appliquées au système.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{...(129)}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\, m\overrightarrow{v_G}}{dt} \quad \text{..(130)}$$

Avec m la masse du système et $\overrightarrow{v_G}$ le centre d'inertie du système.

La masse peut changer ou cours du temps, l'exemple typique est la chaine de masse qui se déplace sur une table vers le sol.

Dans le cas où la masse est constante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\,\vec{v_G}}{dt} \Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\ \vec{a_G} \text{ ....(131)}$$

3.3) Principe des actions réciproques - troisième loi de Newton :

Soit S_1 et S_2 deux systèmes en interaction (Figure V.2), quelque soit le référentiel d'étude et quelque soit leur mouvement (ou absence de mouvement), l'action de S_1 sur S_2 symbolisée par $\vec{F}_{1/2}$ est exactement opposée à l'action simultanée de S_2 sur S_1 symbolisée par $\overrightarrow{F_{2/1}}$.

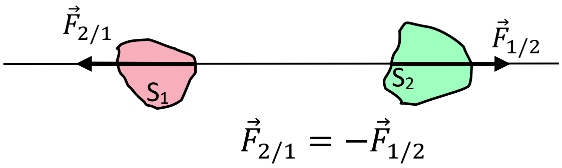


Figure V.2 : Principe des actions réciproques

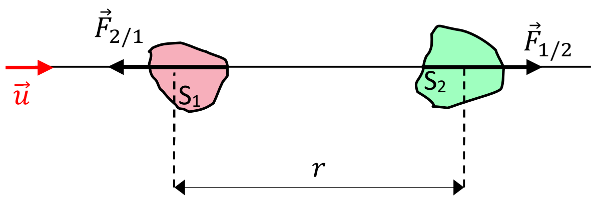
Ce principe et universel, il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'univers comme à l'échelle des particules.

3.4) Loi de gravitation universelle - quatrième loi de Newton :

Tous les objets dans l'univers s'attirent. La force exercée entre deux objets de masses $m_1$et m_2 distants de r est donnée par la loi de gravitation universelle :

$$F_{2/1} = F_{1/2} = \frac{G\,m_1\,m_2}{r^2} \text{.................................(132)}$$

Où G est la constante de gravitation et qui vaut $6.67 * 10^{-11}\ \ Nm^2/Kg^2$



Vectoriellement :

$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$

Figure V.3 : Représentation des forces dans la représentation de la loi de gravitation universelle

Et

$$\vec{F}_{2/1} = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r^2}\ \vec{u} \text{.................................(133)}$$

Application :

Soit M la masse de la terre et m la masse d'un corps se trouvant à la surface de la terre. La force qu'exerce la terre sur le corps est $\vec{F}_{M/m}$ appelé aussi le poids $\vec{P}$.

On a : $\vec{F}_{M/m} = -\frac{G\,M\,m}{R^2}\,\vec{u}$ $\quad (R\ est\ le\ rayon\ de\ la\ terre)$

D'autre part : $\vec{P} = m\,\vec{g}$

Alors : $$\vec{g} = -\frac{G\,M}{R^2}\,\vec{u} \qquad (134)$$

4) Quelques forces particulières :

4.1) Force gravitationnelle ou poids :

Le poids noté $\vec{P}$ est la force exercée par la terre sur un corps de masse m. Par conséquent, il est toujours dirigé vers le centre de la terre. La relation entre la masse m d'un corps et son poids $\vec{P}$ est donnée par :

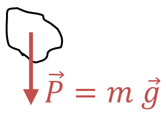


Figure V.4 : Force du poids

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \qquad (135)$$

où $\vec{g}$ est l'accélération dans le cas de chute libre appelée la pesanteur.

4.2) Force de la réaction normale :

Quand un corps pèse sur une surface, cette dernière réagit par une force normale à la surface. Il s'agit d'une force qui s'oppose au poids et empêche le corps de tomber. Elle est notée $\vec{R}$.

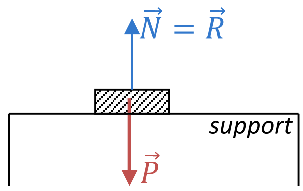


Figure V.5 : Force de réaction

4.3) Force de frottement :

4.3.1) Principe :

Lorsqu'un corps de masse m glisse sur une surface, une force de frottement apparait et empêche son mouvement. Cette force est notée $\vec{f}$ et est toujours dans le sens inverse du mouvement.

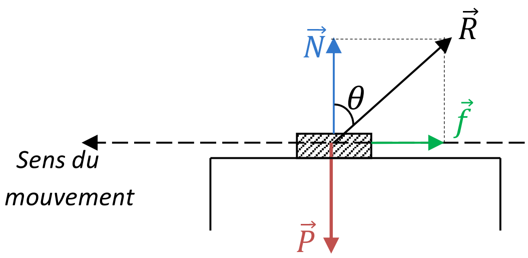


Figure V.6 : Force de frottement

$\vec{N}$: est la normale.

$\vec{f}$: est la force de frottement.

$\vec{R}$: est la résultante de $\vec{N}$ et $\vec{f}$.

D'où : $\quad \vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$

En présence de frottement, la réaction se dévie d'un angle θ, tel que :

$$tan\,\theta = \frac{f}{N} = \mu \quad \text{...(136)}$$

Où μ est appelé le coefficient de frottement.

4.3.2) Frottement statique et frottement dynamique :

Pour commencer à faire glisser un objet sur une surface il faut exercer une force minimale qui est la frontière de l'équilibre statique. Cette force constitue en même temps la force maximale assurant l'équilibre statique.

Si initialement l'objet n'est pas en mouvement, la force de frottement est appelée *frottement statique* $\overrightarrow{f_s}$ qui s'oppose à la force appliquée pour mobiliser l'objet.

Si la force appliquée devient plus intense, l'objet glisse et il est alors soumis au *frottement dynamique* $\overrightarrow{f_d}$.

Il existe alors deux coefficients de frottement :

- Le coefficient de frottement statique μ_s qui correspond à : $f_s(\max) = \mu_s N$.
- Le coefficient de frottement dynamique μ_d qui correspond à : $f_d = \mu_d\, N$.
- Le coefficient de frottement statique $\mu_s$est supérieur au coefficient de frottement dynamique μ_d, c'est le principe du système anti-blockage (ABS) pour l'adhérence des voitures sur la route.

4.4) Tension d'un fil :

La tension d'une corde ou d'un fil est la force exercée par chaque partie de la corde sur la partie voisine ou sur un objet placé à son extrémité. Si la masse de la corde est négligeable, la tension dans la corde aura la même valeur en tous ses points.

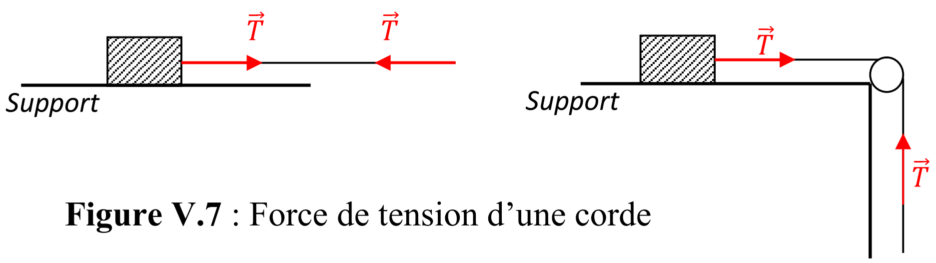


Figure V.7 : Force de tension d'une corde

4.5) Force de rappel d'un ressort :

Un ressort peut travailler en compression ou en extension selon la déformation qu'on lui impose par rapport à sa position d'équilibre.

La force qu'exerce le ressort sur un solide qui lui est accroché est appelée force de rappel $\vec{F_r}$ ou la tension $\vec{T}$. Cette force qui s'oppose constamment à la déformation s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\vec{T} = -K\,x\;\vec{\imath} \qquad (137)$$

Où K est la constante de raideur du ressort, x, la valeur algébrique de l'allongement Δl du ressort et $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire de l'axe du mouvement.

On distingue les trois positions suivantes :

Position 1 → le ressort est au repos

Position 2 → le ressort est étiré de Δl

Position 3 → le ressort est comprimé de Δl

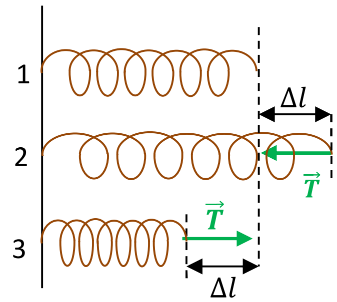


Figure V.8 : Compression et dilatation d'un ressort

5) Moment d'une force :

Soit $\vec{F}$ une force appliquée sur un point matériel M. On appelle moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point quelconque A, la grandeur vectorielle $\mathcal{M}_{\vec{F}/A}$.

$$\mathcal{M}_{\vec{F}/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} \qquad (138)$$

Où $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur reliant les deux points M et A.

6) Moment cinétique :

On considère un point matériel M en rotation autour d'un point fixe O dans un référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$. On désigne par $\vec{v}_M$ la vitesse de M dans R, et par $\vec{P}$ sa quantité de mouvement. On appelle moment cinétique du point M par rapport au point O, le moment par rapport à O de sa quantité de mouvement, il est symbolisé par $\vec{\sigma_O}$:

$$\vec{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \qquad (139)$$

7) Théorème du moment cinétique :

Soit le référentiel galiléen $R(O,x,y,z)$. On considère un point matériel M de masse m q en rotation autour du point fixe O. Le point matériel M de vitesse linéaire $\vec{v}_M$ est soumis à une résultante de forces extérieures notée : $\sum \vec{F}_{ext}$.

On a :

$$\overrightarrow{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}_M$$

$$\Longrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}_M\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} \wedge m\,\vec{v}_M\right] + \left[\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\,(m\,\vec{v}_M)}{dt}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = [\vec{v}_M \wedge m\,\vec{v}_M] + \left[\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{a}_M\right]$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \vec{v}_M \wedge m\,\vec{v}_M = \vec{0} \\ m\,\vec{a}_M = \sum \vec{F}_{ext} \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \sum\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}\right)$$

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext} = \mathcal{M}_{\vec{F}_{ext}/O}$: Le moment de la force par rapport au point O

D'où :

$$\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\vec{F}_{ext}/O} \quad \text{.................................(140)}$$

$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}_{ext}/O}$ correspond à l'aptitude de $\vec{F}_{ext}$à modifier le mouvement de rotation M par rapport à O.

Enoncé :

En un point fixe O d'un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces extérieurs par rapport au point O; qui lui sont appliquées.

8) Plan pour réussir à résoudre les problèmes de dynamique :

Afin de réussir à résoudre les problèmes de dynamique, on propose un plan global et récapitulatif à suivre.

- *Définir le système :*

Il s'agit de préciser le système étudié dans le but de faire un bilan juste des forces extérieures. Généralement le système se réduit à un point matériel de masse *m.* Sinon, si le système possède des dimensions non négligeables devant son déplacement, on se ramène à étudier un point qui correspond au centre d'inertie du système.

- *Choisir le référentiel :*

Le choix du référentiel doit être précisé, car dans certains cas il peut en exister plus qu'un. De plus, il faut s'assurer que le référentiel choisi est bel et bien galiléen pour pouvoir appliquer les lois de newton. Ordinairement, l'étude se fait dans le référentiel terrestre qui est généralement galiléen.

- Faire le bilan des forces extérieures :

C'est une étape primordiale pour la résolution du problème. En effet, il faut faire le tour du système et de savoir qu'à chaque fois qu'il y'a contact il y a une force. On rencontrera habituellement les forces de frottement, la tension d'un ressort ou d'un fil, la réaction d'un support, sans oublier le poids. Il est très judicieux de faire un schéma et de représenter les forces appliquées au centre d'inertie.

- *Appliquer les lois de Newton :*

Il s'agit particulièrement d'appliquer le principe fondamental de la dynamique ou alors le théorème de l'énergie cinétique.

- *Choisir un repère et une base pour l'étude :*

Le repère est nécessaire lors de l'étude. Il permet la projection du principe fondamental de la dynamique suivant les trois directions de l'espace afin d'obtenir les trois composantes de l'accélération.

- *Résolution du problème :*

On est ramené à un problème de cinématique où la détermination de la vitesse et de la position du centre d'inertie du système est possible. On peut alors répondre à toutes les questions posées.

Exercices

Exercice 1 :

Un corps de masse $m = 5{,}5Kg$ attaché à un fil ; se déplace sans frottement sur la surface d'un cône ABC, en tournant autour de l'axe (zz') avec une vitesse angulaire $\omega = 10trs/min$. (Figure 1).

1) Calculer la vitesse linéaire du corps.

2) Calculer la réaction de la surface et la tension du fil.

3) Quelle est la vitesse angulaire nécessaire pour rendre nulle la réaction du plan ?

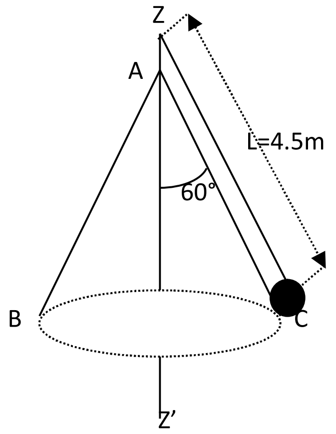


Figure 1

Exercice 2 :

Les données de la figure 2 sont comme suit :

Les masses des corps A et B sont respectivement $10kg$ et $5Kg$. Le coefficient de frottement de A avec la table est 0,2. La masse de la poulie est négligeable et le fil est inextensible et de masse négligeable. Avec le corps A, on attache un corps supplémentaire c de masse inconnue.

1) Quelle est la masse minimale de c qui empêche A de bouger ?

2) Calculer l'accélération du système si on soulève c.

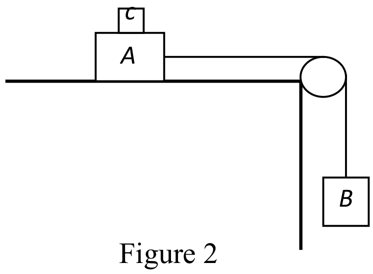


Figure 2

Exercice 3 :

Un enfant se trouve sur un balcon situé à $10\ m$ au-dessus du sol et jette une clef. Le lancé de la clef s'effectue avec un angle de $30°$ sous l'horizontal (Figure 3). La clef arrive au point A du sol 1,2 s plus tard.

On suppose que la différence de hauteur entre le point de lancé de la clef et le sol est $h=10m$.

1) Trouver la distance d séparant le point d'impact A du dessous du balcon.

2) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse de la clef au moment ou elle heurte le sol.

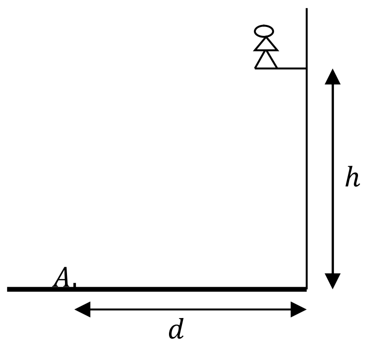


Figure 3

Exercice 4 :

Une machine d'Atwood est constituée d'une poulie de masse négligeable et de deux masses m et $2m$ (Figure 4). Le fil reliant les masses et passant à travers la poulie est inextensible et de masse négligeable. Aussi la masse m est reliée à la terre par un ressort de constante de raideur K.

On écarte la masse $2m$ de sa position d'équilibre ; d'une distance L puis on la lâche sans vitesse initiale.

Montrer que le système est en mouvement vibratoire et déterminer sa période.

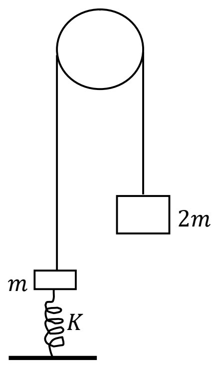


Figure 4

Exercice 5 :

Une masse m glisse à partir d'un point A sans frottements et sans vitesse initiale sur une surface formée par une sphère de rayon r et de centre O.

1) En utilisant les coordonnées de Frenet et le Principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse de m puis en déduire l'expression de la réaction R de la surface sur la masse.

2) Pour quel angle θ la masse m quittera-t-elle la surface ?

3) En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet), déterminer l'expression de la vitesse de la masse m.

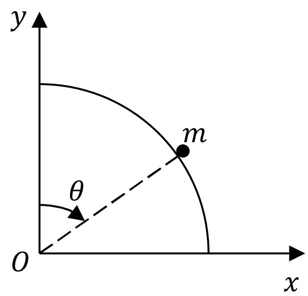


Figure 5

Exercice 6 :

Un solide M assimilé à un point matériel de masse $m = 400g$ monte le long d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ sur l'horizontale, avec une vitesse $v_0 = 15m/s$. Le coefficient de frottement dynamique du plan incliné étant $\mu_d = 0,2$

1) Représenter les forces appliquées sur M.

2 Déterminer jusqu'à quelle distance L le solide se déplace avant de s'arrêter.

3) Quelle est la valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement statique $\mu_{s(max)}$ pour que le solide puisse redescendre ?

4) Supposons que la valeur du coefficient de frottement statique $\mu_s = 1.2$ (inférieure à $\mu_{s(max)}$), le solide va alors redescendre. Quelle est la vitesse v_1 du solide lorsqu'il revient à sa position de départ ?

Réponse :

Exercice 1 :

1) La vitesse linéaire du corps :

$v = \omega\, r$

$$\begin{cases} \omega = 10\ trs/min \\ 1\ tr \longrightarrow 2\pi \end{cases} \Longrightarrow \omega = \frac{10\ .2\pi}{60}$$

$$\Longrightarrow \omega = 1.05\ rad/s$$

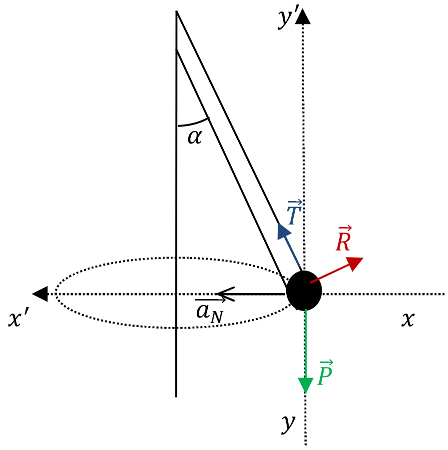
$r = ?$

$$sin\ \alpha = sin60° = \frac{r}{l} \Longrightarrow r = l\ sin60° \Longrightarrow r = 3{,}9m$$

$$v = \omega\, r \Longrightarrow v = \frac{\pi}{3}\ l\ sin60° \Longrightarrow v = 4.1m/s$$

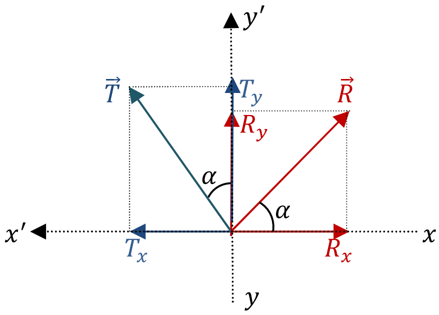
2) La réaction de la surface et la tension du fil :

Le mouvement étant circulaire, l'accélération totale a une composante tangentielle et une composante normale (repère de Frenet).



On applique le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$



Projection par rapport à (xx') :

$$-R_x + T_x = m\ a_N \Longrightarrow -R\cos\alpha + Tsin\ \alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}T = m\frac{(\omega r)^2}{r}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}T - R = 2m\,\omega^2 r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(141)$$

Projection par rapport à (yy') :

Il n y'a pas de mouvement suivant l'axe (yy'); ce qui donne une accélération tangentielle nulle. La résultante des forces extérieures dans ce sens s'annule aussi.

$R_y + T_y - P = 0 \Longrightarrow R\sin\alpha + T\cos\alpha + -mg = 0$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}T - mg = 0$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}R + T - 2\,mg = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(142)$$

De l'équation (142), on trouve : $T = 2\,mg - \sqrt{3}R$

En remplaçant l'expression de T dans équation (141), on trouve :

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{1}{2}m\,\omega^2 r$$

A.N. : $R = 35\,N$ et $T = 47\,N$

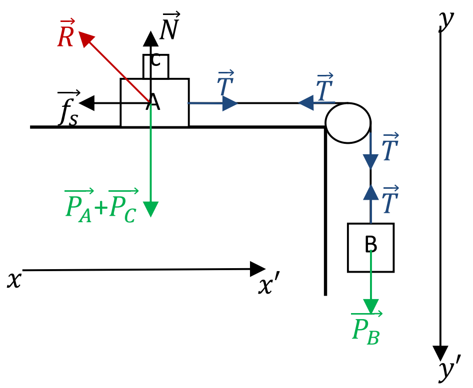
3) La vitesse angulaire nécessaire pour rendre nulle la réaction du plan

$$R = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{1}{2}m\,\omega^2 r = 0 \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\,g}{r}}$$

$\Longrightarrow \omega = 2.1\,rad/s$

Exercice n°2 :

1) La masse minimale de c qui empêche A de bouger



<u>Système de masse $A + c$:</u>

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P_A} + \vec{P_c} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

Projection par rapport à (xx') :

$-f_s + T = 0 \Longrightarrow T = f_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(143)$

Projection par rapport à (yy') :

$P_A + P_c - N = 0 \Longrightarrow N = m_A g + m_c g \ldots\ldots(144)$

<u>Système de masse B</u>

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P_B} + \vec{T} = \vec{0}$$

Projection par rapport à (yy') :

$T = m_B g \dots \dots (145)$

Aussi : $\mu_s = \tan\theta = \frac{f_s}{N} \Longrightarrow N = \frac{f_s}{\mu_s}$

On va remplacer l'expression N de dans l'équation (144) :

$$\frac{f_s}{\mu_s} = m_A g + m_c g$$

On utilise maintenant (142) pour se débarrasser de f_s :

$$\frac{T}{\mu_s} = m_A g + m_C g$$

Enfin on remplace T par son expression trouvée dans (145) :

$$\frac{m_B g}{\mu_s} = m_A g + m_C g \Longrightarrow m_C = \frac{m_B}{\mu_s} - m_A g$$

A.N. : $m_C = 15\ Kg$

2) L'accélération du système si on soulève C

Système de masse $A + C$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \overrightarrow{P_A} + \vec{R} + \vec{T} = m_A \vec{a}$$

Projection par rapport à (xx') :

$-f_d + T = m_A a \dots \dots \dots (146)$

Projection par rapport à (yy') :

$$P_A - N = 0 \Longrightarrow N = m_A g$$

$$\Longrightarrow \frac{f_d}{\mu_d} = m_A g$$

$$\Longrightarrow f_d = \mu_d m_A g \dots \dots \dots (147)$$

En combinant les deux équations (146) et (147), on obtient :

$-\mu_d m_A g + T = m_A a \dots \dots \dots (148)$

Système de masse B

$$\sum \vec{F} = m_B \vec{a} \Longrightarrow \overrightarrow{P_B} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow T = m_B g - m_B a \dots \dots \dots (149)$$

On remplace (148) dans (149) :

$$-\mu_d m_A g + m_B g - m_B a = m_A a \quad \Longrightarrow a = \frac{(m_B - \mu_d m_A)g}{m_A + m_B}$$

A.N. : $a = 1.36\, m/s^2$

Exercice 3 :

1) La distance d séparant le point d'impact A du dessous du balcon

- L'enfant lance la clef avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle $\alpha = 30°$ sous l'horizontal.
- On place un système d'axe au point d'impact A, soit (Axy).
- La clef subit une accélération constante $\vec{g}$ due à la gravitation et suit un mouvement uniformément accéléré.

Alors :

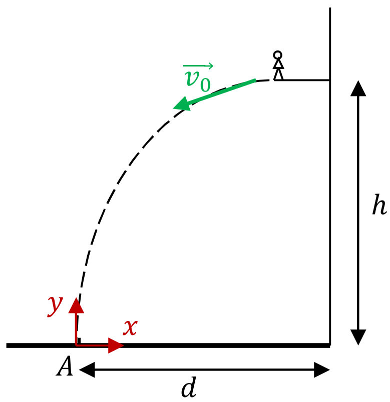
	$\vec{a}$	$\overrightarrow{v_0}$	$\vec{r}$
Suivant (Ax)	0	$-v_0\, cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0$	$x = \frac{1}{2}(0)t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 t + d$
Suivant (Ay)	$-g$	$-v_0\, sin30° = -\frac{1}{2}\, v_0$	$y = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\, v_0 t + h$

L'étude du mouvement est divisée en deux parties : suivant l'axe vertical et suivant l'axe horizontal.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(0)t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 t + d \,\ldots\ldots\ldots (150) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\, v_0 t + h \,\ldots\ldots\ldots (151) \end{cases}$$

où h et d correspondent aux positions initiales et finales de la clef selon x et y.

Lorsque la clef arrive au sol, sa position est $(x\,,y) = (0\,,0)$ et les positions unitiales $(x_0\,,y_0) = (d\,,h)$



$$(151) \Longrightarrow 0 = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\, v_0 t + h$$

$$\Longrightarrow v_0 = \frac{-gt^2 + 2h}{t} \qquad A.N.: v_0 = 4.89\, m/s$$

En remplaçant v_0 et $x = 0$, dans (150)on trouve :

$$x = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 t + d \Longrightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 t$$

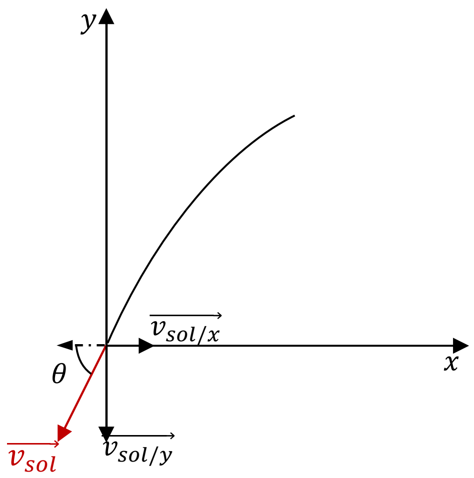
$$\Longrightarrow \; d = \frac{\sqrt{3}}{2}(2h - gt^2) \qquad \text{A.N. : } d = 5.09\ m$$

2) Les caractéristiques du vecteur vitesse de la clef au moment où elle atteint le sol :

	$\overrightarrow{v_{sol}}$
Suivant (Ax)	$\overrightarrow{v_{sol/x}} = 0t - \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0$
Suivant (Ay)	$\overrightarrow{v_{sol/y}} = -gt - \frac{1}{2}\, v_0$

$$v_{sol/x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2h - gt^2}{t}\right)$$

$$v_{sol/x} = -4.23\ m/s$$



$$v_{sol/y} = -gt - \frac{1}{2}\, v_0 = -gt - \frac{1}{2}\left(\frac{2h - gt^2}{t}\right)$$

$$v_{sol/y} = -14.22\ m/s$$

$$\|\overrightarrow{v_{sol}}\| = \sqrt{\left(v_{sol/x}\right)^2 + \left(v_{sol/y}\right)^2}$$

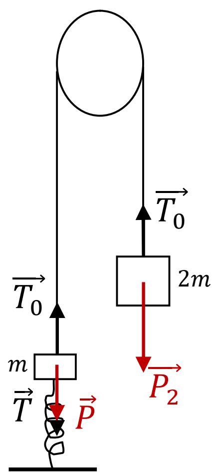
$$\Longrightarrow v_{sol} = 14.83\ m/s$$

$\overrightarrow{v_{sol}}$ forme un angle θ sous l'horizontale tel que :

$$\cos\theta = \frac{v_{sol/x}}{v_{sol}} = 0{,}285 \Longrightarrow \theta = 73.42°$$

Le porteur du vecteur $\overrightarrow{v_{sol}}$ est la tangente de la courbe au point A.

Exercice 4 :



<u>A l'équilibre :</u>

Pour la masse m : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow +\overrightarrow{T_0} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

Projection suivant l'axe (vertical) :

$T_0 - mg - T = 0 \Longrightarrow T_0 - mg - kx_0 = 0$ … … (152)

Où x_0 est l'élongation du ressort à l'équilibre

Pour la masse $2m$: $\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_0} = \vec{0}$

Projection suivant l'axe (vertical) :

$2mg = T_0$ … … (153)

(152)dans (153): $2mg - mg - kx_0 = 0 \Longrightarrow mg = kx_0$ … … … (154)

<u>En mouvement :</u>

Pour la masse m :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow +\overrightarrow{T_0{}'} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projection suivant l'axe du mouvement (vertical) :

$$T_0{}' - mg - T += ma \Longrightarrow T_0{}' - mg - k(x + x_0) = ma \dots\dots (155)$$

Pour la masse $2m$:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_0{}'} = 2m\vec{a}$$

Projection suivant l'axe du mouvement (vertical) :

$$T_0{}' - 2mg = 2ma \Longrightarrow T_0{}' = 2mg - 2ma \dots\dots (156)$$

On remplace (155)dans (156):

$$2mg - 2ma - mg - k(x + x_0) - ma = 0 \Longrightarrow mg - kx - kx_0 - 3ma = 0$$

En se servant de l'équation (154), on trouve :

$$-kx - 3ma = 0 \Longrightarrow a + \tfrac{k}{3m}x = 0$$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{3m}x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre, qui s'écrit aussi $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Cette équation admet une solution sinusoïdale de la forme $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$; où A et B sont des constantes à déterminer.

A et B= ??

à : $t = 0 \ \rightarrow x(0) = x_0$

Je remplace $t = 0$ dans la solution ; ainsi :

$$x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) \ \Longrightarrow x(0) = A = x_0$$

à : $t = 0$ même la vitesse s'annule ; alors :

$$v|_{t=0} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Longrightarrow \ -A\omega\sin\omega t + B\cos\omega t|_{t=0} = 0$$

$$\Longrightarrow \ A\omega\sin 0 + B\cos 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \ B = 0$$

On a obtenu alors : $A = x_0$ et $B = 0$ et puisque $\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}$, la solution finale de l'équation s'écrit : $x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\, t\right)$

ω est appelée pulsation du mouvement, elle est liée à la période T par : $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ainsi, le mouvement des masses est vibratoire sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$

Exercice 5 :

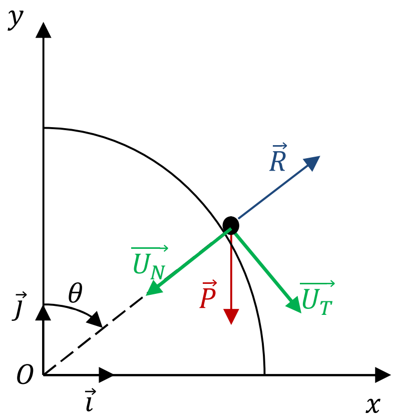
1) La vitesse de la masse :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \ldots\ldots (157)$$

En utilisant la base de Frenet de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{U_N}, \overrightarrow{U_T})$, on trouve :

$\vec{P} = mg\, sin\theta\, \overrightarrow{U_T} + mg\, cos\theta\, \overrightarrow{U_N}$

$\vec{R} = -R\, \overrightarrow{U_N}$



Projection de (157) par rapport à l'axe tangentiel :

$$mg\, sin\theta = m\, a_T \Longrightarrow mg\, sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} = g\, sin\theta \ldots\ldots (158)$$

Projection de (1)par rapport à l'axe normal :

$$mg\, cos\theta - R = m\, a_N \Longrightarrow mg\, cos\theta - R = m\,\frac{v^2}{r}$$

$$\Longrightarrow g\, cos\theta - \frac{R}{m} = \frac{v^2}{r} \ldots\ldots (159)$$

De l'quation (158), on détermine l'expression de la vitesse :

$$\frac{dv}{dt} = g\, sin\theta \Longrightarrow \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = g\, sin\theta$$

Avec : $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{r}$

$$\frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{v}{r} = g\, sin\theta \Longrightarrow v\, dv = r\, g\, sin\theta\, d\theta$$

$$\Longrightarrow \int_0^v v\, dv = r\, g \int_0^\theta sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v = [-r\,g\cos\theta]_0^\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -r\,g\cos\theta + r\,g$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2rg(1-\cos\theta)}$$

De l'équation (159), on déduit la réaction R :

$$g\cos\theta - \frac{R}{m} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow R = m\,g\cos\theta - m\,\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow R = m\,g\cos\theta - m\,\frac{2rg(1-\cos\theta)}{r}$$

$$\Rightarrow R = m\,g\cos\theta - 2\,m\,g + 2\,m\,g\cos\theta$$

$$\Rightarrow R = 3\,m\,g\cos\theta - 2\,m\,g$$

2) Pour que m quitte la surface, il faut que la réaction R s'annule, ainsi :

$$R = 0 \Rightarrow 3\,m\,g\cos\theta - 2\,m\,g = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos\theta = 2$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta \simeq 48.19°$$

La masse quittera la surface pour un angle $\theta \simeq 48.19°$

3) l'expression de la vitesse de la masse m en utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) :

Le théorème du moment cinétique se résume dans l'équation suivante :

$$\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \sum\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}\right)$$

On prend la première partie de l'équation du théorème :

$$\overrightarrow{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_O}(M) = -r\,\overrightarrow{u_N} \wedge m\,v\,\overrightarrow{u_T}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_O}(M) = r\,m\,v\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = \frac{d}{dt}r\left(m\,v\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{dt} = r\,m\frac{dv}{dt}\,\vec{k}$$

On précise que le vecteur $\vec{k}$ est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{u_T}$.

On s'intéresse maintenant à la deuxième partie de l'équation du théorème.

Puisque on a deux forces, on aura deux moments de forces, celui du poids et celui de la réaction.

$$\sum\left(\overrightarrow{OM}\wedge\ \vec{F}_{ext}\right)=\ \left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{R}\right)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}=r\,\overrightarrow{u_N}\ \wedge\left(mg\ sin\theta\ \overrightarrow{U_T}+mg\ cos\theta\ \overrightarrow{U_N}\right)=\ rmg\ sin\theta\ \vec{k}\\ \overrightarrow{OM}\wedge\vec{R}=r\,\overrightarrow{u_N}\ \wedge(-R\,\overrightarrow{u_N})=\vec{0}\end{cases}$$

$$\sum\left(\overrightarrow{OM}\wedge\ \vec{F}_{ext}\right)=rmg\ sin\theta\ \vec{k}$$

Donc :

$$r\,m\frac{dv}{dt}\ \vec{k}=rmg\ sin\theta\ \vec{k}\Longrightarrow\frac{dv}{dt}=\ g\ sin\theta$$

En intégrant de la même façon que dans la réponse à la question 1), on retrouve :

$$v=\sqrt{2rg(1-cos\,\theta)}$$

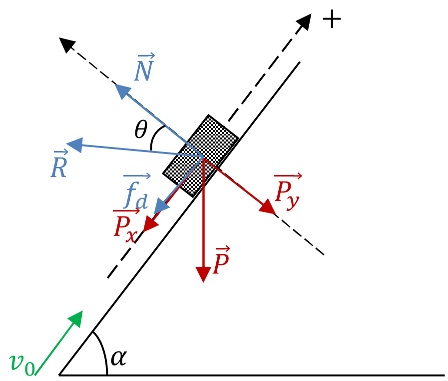
Exercice 6 :

1) Représentation des forces sur appliquées sur M

$\vec{P}$ est la résultante entre $\overrightarrow{P_x}$ et $\overrightarrow{P_y}$

$\vec{R}$ est la résultante entre $\vec{N}$ et $\overrightarrow{f_d}$

La force de frottement $\overrightarrow{f_d}$ est toujours dans le sens inverse du mouvement.



2) Jusqu'à quelle distance L le solide se déplace avant de s'arrêter.

Soit : v_0: la vitesse initiale

v_1: la vitesse qui correspond à la distance L.

L'équation de la position du mouvement est de la forme : $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

L'équation de la vitesse est : $v_1=at+v_0\Longrightarrow t=\frac{v_1-v_0}{a}$

Alors : $x=\frac{1}{2}a\left(\frac{v_1-v_0}{a}\right)^2+v_0\left(\frac{v_1-v_0}{a}\right)+x_0\Longrightarrow x-x_0=\frac{1}{2}a\left(\frac{{v_1}^2-v_1v_0+{v_0}^2}{a^2}\right)+\frac{v_1v_0-{v_0}^2}{a}$

$$\Longrightarrow x - x_0 = \left(\frac{{v_1}^2 - v_1 v_0 + {v_0}^2 + 2v_1 v_0 - 2{v_0}^2}{2a}\right)$$

Sachant que : $x - x_0 = L$ alors : $L = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2a}$

Au point où le solide s'arrête $(v_1 = 0) \Longrightarrow L = \frac{-{v_0}^2}{2a}$

$a = ?$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projection de cette équation par rapport à l'axe du mouvement :

$$-P_x - f_d = ma \Longrightarrow -mg \sin\alpha - f_d = ma \dots\dots\dots (160)$$

Projection de l'équation par rapport à l'axe perpendiculaire à l'axe du mouvement :

$$-P_y + N = 0 \Longrightarrow -mg\cos\alpha + N = 0 \dots\dots\dots (161)$$

$$\tan\theta = \mu_d = \frac{f_d}{N} \Longrightarrow N = \frac{f_d}{\mu_d}$$

$$(161) \Longrightarrow\ -mg\cos\alpha + \frac{f_d}{\mu_d} = 0$$

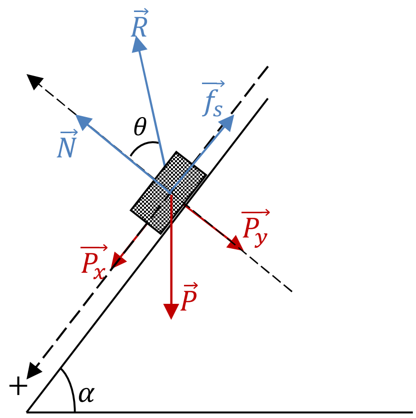
$$\Longrightarrow f_d = \mu_d\, mg\cos\alpha$$

$$(160) \Longrightarrow -mg\sin\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha = ma$$

$$\Longrightarrow a = g(-\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)$$

$$\Longrightarrow a = -9.47\ m/s^2$$

$$\Longrightarrow L = 11.87\ m$$



3) La valeur $\mu_{s(max)}$ pour que le solide puisse redescendre

Pour que le solide puisse redescendre il faut que : $P_x \geq f_{s(\max)} \Longrightarrow f_{s(\max)} \leq P_x$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projection de l'équation par rapport à l'axe perpendiculaire à l'axe du mouvement :

$$-P_y + N = 0 \Longrightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} \Longrightarrow N = \frac{f_s}{\mu_s}$$

$$\Longrightarrow \frac{f_s}{\mu_s} = mg\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow f_s = \mu_s\, mg\cos\alpha$$

$f_{s(\max)} \leq P_x \Longrightarrow \mu_{s(\max)}\, mg\, cos\, \alpha \leq mg\, sin\, \alpha$

$$\Longrightarrow \mu_{s(\max)} \leq \frac{sin\, \alpha}{cos\, \alpha}$$

$$\Longrightarrow \mu_{s(\max)} \leq tan\, \alpha$$

$$\Longrightarrow \mu_{s(\max)} \leq 1.73$$

Pour que le solide puisse redescendre, il faut que la valeur du coefficient de frottement soit inférieure à 1.73

4) La vitesse v' du solide lorsqu'il revient à sa position de départ

$v'^2 - {v_1}^2 = 2\, a'\, L \Longrightarrow v' = \sqrt{2\, a'\, L}$

$v_1 = 0\,,\ L = 11.87\,,\ a' = ?$

$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a'} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\overrightarrow{a'}$

Projection de cette équation par rapport à l'axe du mouvement :

$P_x - f_s = ma' \Longrightarrow mg\, sin\, \alpha - f_s = ma' \ldots\ldots\ldots (162)$

Projection de l'équation par rapport à l'axe perpendiculaire à l'axe du mouvement :

$-P_y + N = 0 \Longrightarrow N = mg\, cos\, \alpha$

Sachant que : $N = \frac{f_s}{\mu_s}$, alors :

$\frac{f_s}{\mu_s} = mg\, cos\, \alpha \Longrightarrow f_s = \mu_s\, mg\, cos\, \alpha \ldots\ldots\ldots (163)$

Remplaçons (163) dans (162) :

$mg\, sin\, \alpha - \mu_s\, mg\, cos\, \alpha = ma' \Longrightarrow a' = g(sin\, \alpha - \mu_s g\, cos\, \alpha)$

$$\Longrightarrow a' = 2.61\, m/s^2$$

D'où :

$v' = \sqrt{2\, a'\, L} = 7.87\, m/s$

Chapitre VI

Travail et énergie

1) Travail d'une force :

Le travail d'une force traduit l'effort fourni pour déplacer un corps le long d'un trajet quelconque. Il se mesure en ***joule*** **(J)**, où un joule équivaut $Kg.m^2\ s^{-2}$

1.1) Travail élémentaire -travail d'une force variable :

Soit un point M de position variable dans le temps (un déplacement quelconque), soumis à une force $\vec{F}$ variable aussi dans le temps. Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est défini entre des positions infiniment rapprochées $M(t)$ et $M'(t')$. Cette condition sous-entend que le déplacement $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr}$ est supposé infinitésimal et rectiligne. Ainsi, la direction du vecteur déplacement tend vers la tangente de la trajectoire.

M et M' sont très proches $\Longrightarrow \begin{cases} \Delta t \to 0 \\ \|\overrightarrow{MM'}\| \to 0 \text{ et } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr} \end{cases}$

Sachant que : $\overrightarrow{dr} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$dW_{M\to M'} = \vec{F}.\overrightarrow{dr} \quad \text{.............................(164)}$$

Ou bien : $dW_{M\to M'} = \vec{F}.\overrightarrow{MM'}$

$\overrightarrow{MM'}$ est appelé déplacement élémentaire.

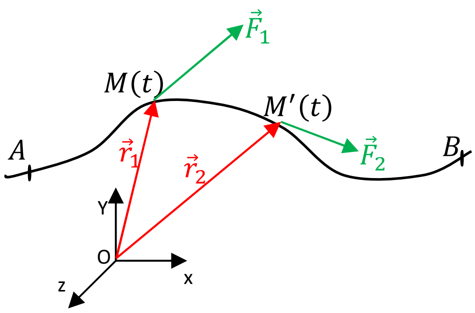


Figure VI.1 : Travail d'une force variable

Généralement le travail d'une force dépend du chemin suivi, pour trouver le travail total entre les points A et B il suffit d'intégrer cette équation du travail élémentaire.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW_{M\to M'} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} \quad \text{............(165)}$$

1.2) Travail d'une force constante en direction et en module :

On suppose que le point M se déplace sur une trajectoire quelconque entre les positions A et B sous l'effet d'une force $\vec{F}$ constante en direction et en module.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\ \overrightarrow{dr} = \int_A^B \left(F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}\right)\left(dx\,\vec{\imath} +\ dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$= \int_A^B \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right)$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y\,dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz$$

$$= F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dy + F_z \int_{z_A}^{z_B} dz$$

$$= F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A) + F_z(z_B - z_A)$$

D'où :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\,.\overrightarrow{AB}$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|\,.\,\|\overrightarrow{AB}\|\,.\cos\alpha \qquad \text{..........(166)}$$

Le travail d'une force constante est indépendant de la trajectoire, il ne dépend que des positions initiale et finale du point matériel.

1.3) Différents types de travail :

Le travail est une grandeur algébrique, quand il est positif il est appelé un *travail moteur*. Par contre, si le travail est négatif, il est qualifié de *résistant.*

Trois cas peuvent se présenter selon le signe de $cos\,\alpha$:

1er cas : $cos\,\alpha > 0$

$cos\,\alpha > 0 \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$

$\Rightarrow$ le travail est moteur

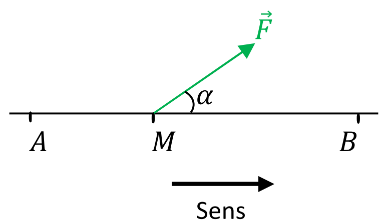


Figure VI.2 : Travail moteur

2ème cas : $cos\,\alpha < 0$

$cos\,\alpha < 0 \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$

$\Rightarrow$ le travail est résistant

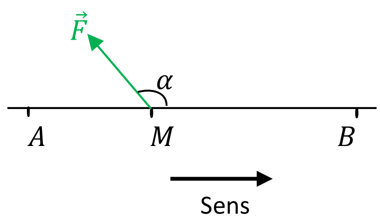


Figure VI.3 : Travail résistant

3

3ème cas : $cos\,\alpha = 0$

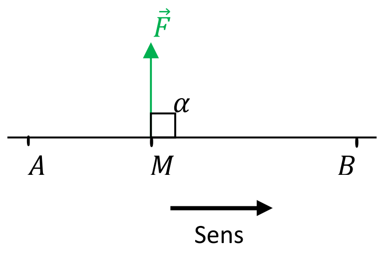


Figure VI.4 : Travail nul

$$cos\,\alpha = 0 \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = 0$$

$\Rightarrow$le travail est nul

1.4)Exemples de calcul du travail d'une force :

a- Travail du poids d'un point matériel :

Un point matériel M de masse m se déplace de A vers B. Le point matériel Mest soumis à son poids.

Calculer le travail du poids de A à B.

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}\,.\,\overrightarrow{dr}$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

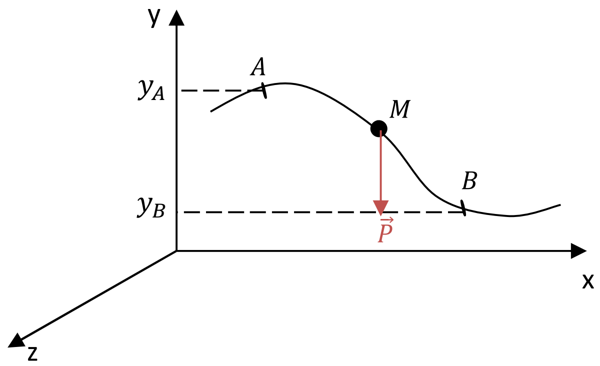


Figure VI.5 : Différence de hauteur entre les points A et B

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}\,.\,\overrightarrow{dr} \Longrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B 0\,.\,dx + (-mg)dy + 0\,.\,dz$$

$$\Longrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B -mg\;\; dy$$

$$\Longrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg\int_A^B\;\; dy$$

$$\Longrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(y_A - y_B)$$

$$\Longrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = mgh \qquad \text{avec : } h = y_B - y_A$$

Remarque :

- Le travail de $\vec{P}$ ne dépend pas du chemin suivi (dans la mécanique newtonienne où g est constante), il dépend uniquement des positions initiale et finale car le poids est une force constante.

- Lors du déplacement du point matériel de A vers B, le travail du poids est un travail moteur ($W_{A\to B}(\vec{P}) > 0$).
- Cependant si le déplacement du point matériel se fait de B vers A, le travail du poids serait un travail résistant ($W_{A\to B}(\vec{P}) < 0$).

b- Travail d'une force variable :

Un point matériel se déplace sous l'action d'une force $\vec{F} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$ sur une droite d'équation $y = -2x$.

Calculer le travail de cette force lorsque le point se déplace de l'origine O vers le point $A(1,3)$.

Calcul du travail :

$$\begin{cases} dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr} \\ \vec{F}\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow dW = 2x\,dx - y\,dy$$

Le point se déplace sur la droite $y = -2x \Longrightarrow dy = -2\,dx$

D'où : $dW = 2x\,dx - (-2x)\,(-2\,dx) \Longrightarrow dW = -2x\,dx$

c- Travail de la force de rappel :

Un ressort de constante d'élasticité K repose sur un plan horizontal. L'une des extrémités est fixe et l'autre est accrochée à une masse M. On étire le ressort puis on le lâche. Quel est le travail de la force $\vec{F}$ lorsque la masse de déplace de la position x_1 à la position x_2?

$$\vec{F} = -K\,\vec{x} \Longrightarrow \vec{F} = -K\,x\,\vec{\imath}$$

Et :

$$dW(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dr} \Longrightarrow W(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

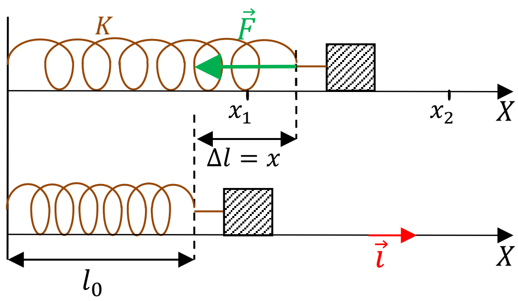


Figure VI.6 : Force de rappel du ressort

Or :

$$\vec{F}\begin{pmatrix} -Kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} -Kx.dx \implies W(\vec{F}) = -K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\implies W(\vec{F}) = \frac{K}{2}\left({x_1}^2 - {x_2}^2\right)$$

2) Puissance instantanée d'une force :

La puissance instantanée P d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point M se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ est la variation instantanée du travail de cette force.

$$P(t) = \frac{dW}{dt} \text{.....................................(167)}$$

D'une autre part : $dW = \vec{F}\,dr$

Alors : $P = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt}$

Or : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Ce qui donne la deuxième expression de la pression instantanée d'une force :

$$P(t) = \vec{F}(t).\vec{v}(t) \text{ ....(168)}$$

L'unité de la puissance est le Watt (W)

Avec : $1W = 1J/s = 1\,Kg.m^2\,s^{-3}$

Le travail d'une force entre les instants t_1 et t_2 peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} \implies dW = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

$$\implies dW = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t).\vec{v}(t)\,dt \text{....................(169)}$$

3) Energie cinétique :

3.1) Définition :

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse v est l'´energie qu'il possède en vertu de son mouvement. Elle est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \text{................................(170)}$$

En fonction de la quantité de mouvement $\vec{P}$:

$\vec{P}$= m $\vec{v}$ Alors :

$$E_C = \frac{P^2}{2m} \quad \text{.....................................(171)}$$

L'énergie cinétique est une grandeur scalaire toujours positive.

3.2) Théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre les positions A et B est égale au travail de la résultante des forces extérieures $(\vec{F}_{ext})$ qui lui sont appliquées pendant son déplacement.

$$\Delta\, E_C = E_{C(B)} - E_{C(A)} = W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) \quad \text{...............(172)}$$

Preuve :

$$dW(\vec{F}_{ext}) = (\vec{F}_{ext})\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow dW(\vec{F}_{ext}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,\overrightarrow{dr}$$

$$\Rightarrow dW(\vec{F}_{ext}) = m\,d\vec{v}\,.\vec{v}$$

Le travail est la résultante des forces appliquées au point matériel de la position A de vitesse v_A à la position B de vitesse v_B est : $W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \int_A^B dW$

Alors :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \int_{v_A}^{v_B} m\,.\vec{v}\,.d\vec{v} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_A}^{v_B}$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \frac{1}{2}m\,{v_B}^2 - \frac{1}{2}m\,{v_A}^2$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

4) Energie potentielle :

4.1) Force non conservative :

Si le travail de la force dépend du chemin parcouru par le point matériel, alors la force est dite non conservative.

Exemple : la force de frottement $\vec{f} = -\mu\,\vec{N}$, la force magnétique $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

Généralement les forces non conservatives sont les forces qui dépendent simultanément du temps et de la vitesse.

4.2) Force conservative :

Une force appliquée à un point matériel est dite conservative si son travail est indépendant de la trajectoire de ce point. Plus clairement, le travail dépend uniquement des positions de départ et d'arrivée.

Exemple : le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$, la force de rappel d'un ressort $\vec{F} = -Kx$, la force électrique $\vec{F} = q\,\vec{E}$.

Soit une force $\vec{F}$ qui dérive d'une fonction scalaire Ψ à trois variables (x, y, z)

$$\vec{F} = -grad\ \Psi \Longrightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Le travail de $\vec{F}$ s'écrit :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

$$= -grad\ \Psi\ \overrightarrow{dr} \qquad \text{Avec : } \overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

$$= -d\ \Psi$$

Entre les points A et B le travail W se calcule comme suit :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW$$

$$= -\int_A^B d\ \Psi$$

$$= \Psi_A - \Psi_B$$

$$= \Psi$$

La fonction $\Psi = \Psi_A - \Psi_B$ a la dimension d'un travail donc d'une énergie. En plus Ψ dépend de la position (x, y, z); on en conclu que c'est une énergie potentielle qu'on appellera $E_P = E_P(A) - E_P(B)$. La force $\vec{F}$ va pouvoir s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = -grad\ E_P \text{.............................(173)}$$

On dit que la force dérive d'un potentiel.

Deux propriétés importantes découlent de ce résultat :

- Puisque pour n'importe quelle fonction $\mathcal{X}$, on a :

  $$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{grad}\ \mathcal{X} = \vec{0}$$

  En appliquant cette propriété à : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_p$, on aura :

  $$\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \vec{0}$$

- $\oint \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = \int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dr} + \int_B^A \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = E_{p(A)} - E_{p(B)} + E_{p(B)} - E_{p(A)}$

  D'où : le travail sur un contour fermé est nul.

  $$\oint \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = 0$$

4.3) Définition de l'énergie potentielle :

Le travail d'une force conservative $\vec{F}$ appliquée à un point matériel entre les positions A et B est égale à la différence de l'énergie potentielle entre les points initial A et final B.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = E_{p(A)} - E_{p(B)} \quad\text{...............(174)}$$

Où $E_{p(A)}$: est l'énergie potentiel à la position A et $E_{p(B)}$: est l'énergie potentiel à la position B.

$\int_A^B dE_p = E_{p(B)} - E_{p(A)}$: est la différence de l'énergie potentielle.

et :

$$\int_A^B dE_p = \Delta E_p$$

Finalement :

$$\Delta E_p = E_{p(B)} - E_{p(A)} = -W_{A\to B}(\vec{F}) = -\int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dr} \quad\text{...............(175)}$$

Remarque :

La relation obtenue $dE_p = -\vec{F}\,\overrightarrow{dr}$ donne $E_p = -\left(\int \vec{F}\,\overrightarrow{dr}\right) + c$.

En effet, l'énergie potentielle n'est connue qu'à une constante près. Dans la résolution des problèmes, il faudra choisir arbitrairement un point où l'énergie potentielle est nulle afin d'annuler la constante c.

4.4) Exemples de calcul de l'énergie potentielle :

- *L'énergie potentielle d'un point matériel situé à une hauteur z:*

On considère un point matériel de masse m situé à une hauteur z de la surface de la terre. Le point matériel est soumis à la force de son poids : $\vec{F} = \vec{P} = mg\,\vec{k}$

Il est possible de résoudre le problème soit en considérant l'axe d'étude *(OZ)* orienté vers le haut ou bien orienté vers le bas. Les deux études sont équivalentes et nous mène vers le même résultat.

<u>1er cas :</u> $\vec{k}$ est dirigé vers le haut

$$dE_p = -\vec{F}\,\overrightarrow{dr} \Longrightarrow dE_p = -\vec{P}\,\overrightarrow{dr}$$

$$\overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

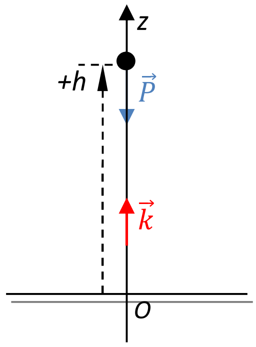


Figure VI.7 : Orientation de l'axe vers le haut

Alors :

$$dE_p = -\left(-mg\,\vec{k}\,.\,dz\,\vec{k}\right) \Longrightarrow dE_p = mg\,dz$$

$$\Longrightarrow \int E_p = \int mg\,dz$$

$$\Longrightarrow E_p = m\,g\,z + c$$

$c = ??$

On choisit la surface de la terre comme origine de l'énergie potentielle.

Soit : $E_p(z = 0) = 0 \Longrightarrow m\,g\,0 + c = 0$

$$\Longrightarrow c = 0$$

$$\Longrightarrow E_p(z) = mgz$$

Dans ce cas $z = +h$. Un objet de masse m à la hauteur h de la surface de la terre aura une énergie potentielle $E_p(z = h) = mgh$

<u>2ème cas :</u> $\vec{k}$ est dirigé vers le bas

$$\overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

$$dE_p = -\vec{F}\,\overrightarrow{dr} \Longrightarrow dE_p = -\vec{P}\,\overrightarrow{dr}$$

$$\Longrightarrow dE_p$$

$$= -\left(mg\,\vec{k}\,.\,dz\,\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow dE_p = -mg\,dz$$

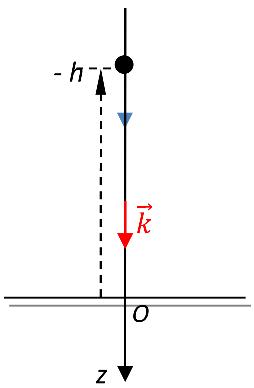


Figure VI.8 : Orientation de l'axe vers le bas

$$\Longrightarrow \int E_p = \int -mg\, dz$$

$$\Longrightarrow E_p = -m\, g\, z + c'$$

$c' = ??$

Toujours, on choisit la surface de la terre comme origine de l'énergie potentielle.

Soit : $E_p(z=0) = 0 \Longrightarrow -m\, g\, 0 + c' = 0$

$$\Longrightarrow c' = 0$$

$$\Longrightarrow E_p(z) = -mgz$$

Dans ce cas et par rapport au repère choisi $(z = -h)$, un objet de masse m à la hauteur h de la surface de la terre aura une énergie potentielle :

$E_p(z = -h) = -mg(-h) = +mgh$

- *L'énergie potentielle de la force élastique d'un système masse-ressort :*

On considère un corps de masse m accroché horizontalement à un ressort de constante de raideur k.

La force de rappel d'un ressort est une force conservative car elle ne dépend que des positions initiale et finale de la masse accrochée à son extrémité.

$$dE_p = -\vec{F}\,\overrightarrow{dr}$$

$\vec{F}\begin{pmatrix} -Kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

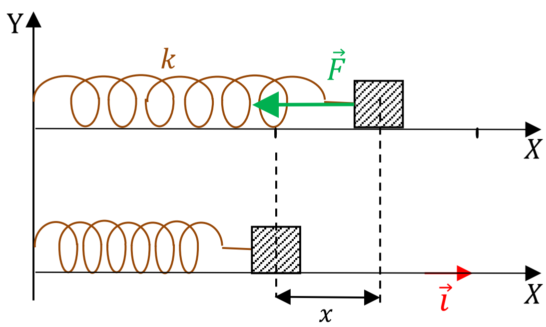


Figure VI.9 : Représentation de la force de rappel d'un ressort pour le calcul de l'énergie potentielle

Alors :

$dE_p = -(-k\, x\, \vec{\imath})\ (dx\, \vec{\imath})$

$$\Longrightarrow dE_p = k\ x\ dx$$

$$\Longrightarrow$$

$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2 + c$

Pour fixer la constante c, on

pose la condition que l'énergie potentielle est nulle à l'équilibre, lorsque son élongation est nulle ($x = 0$).

On aura :

$$0 = \frac{1}{2} k\, 0^2 + c \Longrightarrow c = 0$$

Finalement, l'énergie potentielle d'un ressort comprimé ou étiré d'une longueur x est donc : $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

5) Energie mécanique :

5.1) Définition :

L'énergie mécanique E_m ou encore appelée énergie totale d'un point matériel à un instant donné est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle à cet instant.

$$E_m = E_c + E_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(176)$$

5.2) Théorème de l'énergie mécanique :

Enoncé :

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux positions A et B est égale au travail des **forces non conservatives** agissant sur ce point matériel.

Preuve :

Soit un point matériel soumis simultanément à une résultante de forces conservatives $\vec{F}$ et une résultante de forces non conservatives $\vec{f}$. Le point matériel est en mouvement de la position initiale A vers la position finale B.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

Or :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

D'où :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{f}) = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

Par ailleurs, en utilisant la définition de l'énergie potentielle :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_p = E_{p(A)} - E_{p(B)}$$

En combinant ces dernières équations, on aura :

$E_{p(A)} - E_{p(B)} + W_{A\to B}(\vec{f}) = E_{C(B)} - E_{C(A)} \Longrightarrow (E_{p(B)} + E_{C(B)}) - (E_{p(A)} + E_{C(A)}) = W_{A\to B}(\vec{f})$

Sachant que : $E_p + E_C = E_m$

On aboutit à :

$$E_{m(B)} - E_{m(A)} = W_{A\to B}(\vec{f}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(177)$$

Ou :

$$\Delta E_m = W_{A\to B}(\vec{f}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(178)$$

Remarque :

Généralement les forces non conservatives sont des forces de frottement (et des forces extérieurs…). Il en résulte une diminution de l'énergie totale convertie en énergie thermique car $W_{A\to B}(\vec{f}) < 0$.

5.3) Principe de conservation de l'énergie mécanique :

Si un système est isolé c'est à dire qu'il n'échange aucune énergie avec l'environnement extérieur, alors son énergie mécanique totale est conservée. Dans ce principe, on sous-entend qu'on ne considère que les forces conservatives.

Ainsi :

$$E_m = E_C + E_P = cste \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(179)$$

Ou :

$$\Delta E_m = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(180)$$

Autrement dit :

Les énergies E_c et E_p se compensent à tout instant. Le système ne peut pas perdre de l'énergie et alors $W_{A\to B}(\vec{f}) = 0$, par conséquent il n'y a pas de force de frottements.

Exercices :

Exercice 1 :

1) Une personne de $50\ kg$ monte un escalier de $4m$ de hauteur. Déterminer le travail requis pour accompagner cet effort.

2) Un atome de carbone de masse égale à $1.99\ 10^{-26}\ kg$ a une énergie cinétique de $4.64\ 10^{-19}\ J$. A quelle vitesse se déplace-t-il ?

3) Un camion de masse $5000\ kg$ démarre et atteint une vitesse de $36\ kg/h$ en $25\ s$. En négligeant les frottements, calculer le travail et la puissance du moteur ?

Exercice 2 :

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F} = (x - ay)\,\vec{\imath} + (2y - 2x)\,\vec{\jmath}$.

1) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ pour le déplacement de M du point $O(0,0)$ au point $B(6,3)$ en passant par le point $A(0,3)$.

2) Pour quelle valeur de a la force $\vec{F}$ est conservatrice ? En déduire l'énergie potentielle E_P.

3) Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour le déplacement de M suivant une trajectoire circulaire de rayon R et de centre $O(0,0)$.

Exercice 3 :

Une bille de masse $m = 0.1\ kg$ glisse sans frottement à l'intérieur d'une gouttière de rayon $r = 50\ cm$. En augmentant la hauteur h, la bille pourra arriver au point O'.

1) Déterminer en fonction de r ; la hauteur minimale h_{min}, à partir de laquelle il faut lancer la bille pour qu'elle puisse arriver au point O' sans qu'elle ne quitte la gouttière.

2) Déterminer dans ces conditions la vitesse et l'énergie totale au point O.

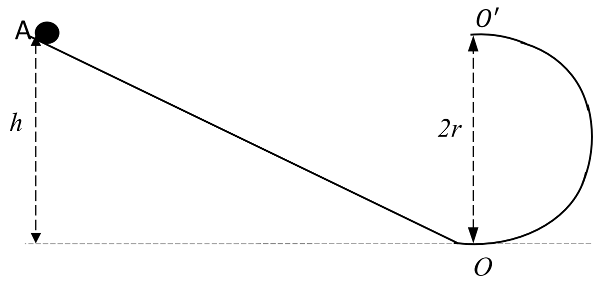


Figure 1

Exercice 4 :

Un solide (S) de masse m est accroché à un ressort de constante de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixée au point C (Figure2). Initialement le solide est au repos au point O. On déplace (S) du point O au point A, tel que $OA = a$, puis on le lâche, le solide va alors effectuer des oscillations.

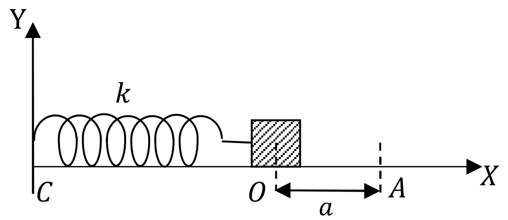


Figure 2

1) En négligeant les forces de frottements, déterminer la vitesse de (S)au point O.

2) On suppose que le solide (S)subit une force de frottement caractérisée par un coefficient dynamique μ_d. Que devient la vitesse de (S)au point O ?

Exercice 5 :

On dispose d'une piste constituée de deux parties parfaitement lisses AB et CD et d'une partie rugueuse BC de coefficient de frottement $\mu_d = 0.665$, et de longueur $6m$.
A l'extrémité de la piste est placé un ressort de constante de raideur $k = 2200\ N/m$.
Un bloc de masse $m = 10\ kg$ est lâché sans vitesse initiale à partir du point A situé à une hauteur $h = 5m$. (Figure 3)

1) Calculer l'énergie totale aux points : A, B et C. Commenter les résultats trouvés.

3) Calculer la compression maximale du ressort.

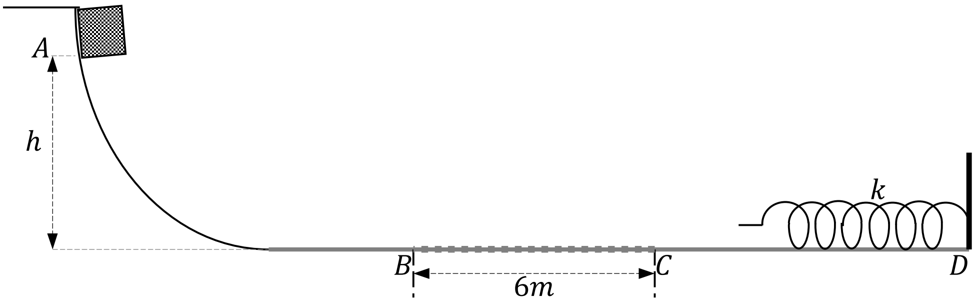


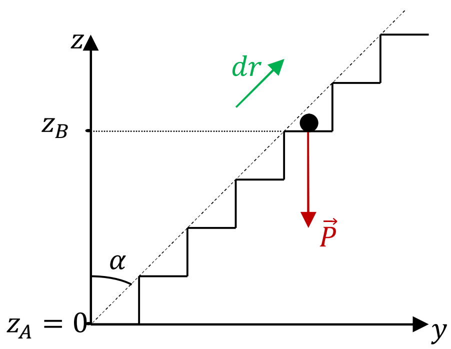
Figure 3

Réponse :

Exercice 1 :

1)

$dW = \vec{F}\,dr \Longrightarrow W = \int \vec{F}\,dr = \int \vec{P}\,dr$



$\vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{dr}\begin{pmatrix} 0 \\ dr\sin\alpha \\ dr\cos\alpha \end{pmatrix}$

Or :

$\cos\alpha = z/r \Longrightarrow r = z/\cos\alpha$

$\Longrightarrow dr = dz/\cos\alpha$

$$W = \int -\, mg\, dr \cos\alpha \Longrightarrow W = \int -mg\ \cos\alpha\ \frac{dz}{\cos\alpha}$$

$$\Longrightarrow W = \int_{z_A}^{z_B} -mg\, dz$$

$$\Longrightarrow W = -mg(z_B - z_A)$$

$$\Longrightarrow W = -mgh$$

$$\Longrightarrow W = -1962\, J$$

2)

$$E_c = \frac{1}{2}\, mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2\, E_c}{m}} \qquad \Longrightarrow\ v = 6{,}28\ 10^3 m/s$$

3) $W = \Delta\, E_c = E_{c(finale)} - E_{c(initiale)} \Longrightarrow W = \frac{1}{2}\, m{v_f}^2 - \frac{1}{2}\, m{v_i}^2$

v_i: la vitesse initiale étant nulle, le travail devient :

$$W = \frac{1}{2}\, m{v_f}^2 \Longrightarrow W = 25\ 10^4\, J$$

La puissance du moteur est calculée comme suit :

$$P = \frac{W}{t} \Longrightarrow P = 10^4\, watt$$

Exercice 2 :

$$\vec{F} = (x - ay)\,\vec{\imath} + (2y - 2x)\,\vec{\jmath}$$

$$dW = \vec{F}\, dr = F_x\, dx + F_y\, dy \Longrightarrow dW = (x - ay)dx + (2y - 2x)dy$$

$$\Longrightarrow W = \int (x - ay)dx + \int (2y - 2x)dy$$

$$W_{0B} = W_{0A} + W_{AB}$$

Du point O au point A, x ne varie pas ($x = 0$)et y varie de 0 à 3.

$$W_{0A} = \int_0^0 (x - ay)dx + \int_0^3 (2y - 2x)dy = \int_0^3 (2y - 2x)dy = \left[\frac{2}{2}y^2\right]_0^3$$

$$\Longrightarrow W_{0A} = 9$$

Du point A au point B, x varie de 0 à 6 et y ne varie pas ($y = 3$)

$$W_{AB} = \int_0^6 (x - ay)dx + \int_3^3 (2y - 2x)dy = \int_0^6 (x - 3a)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3\, a\, x\right]_0^6$$

$\Longrightarrow W_{AB} = 18 - 18a$

D'où :

$W_{0B} = 27 - 18a$

Pour que $\vec{F}$ soit conservative, il faut que $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x - ay) & (2y - 2x) & 0 \end{vmatrix} = (-2 + a)\vec{k}$$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow (-2 + a)\vec{k}$

$\Longrightarrow a = 2$

Pour $a = 2$ la force $\vec{F}$ est conservative.

C'est-à-dire que $\vec{F} = (x - 2y)\,\vec{\imath} + (2y - 2x)\,\vec{\jmath}$, dérive d'un potentiel E_P

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\;E_P(x, y) \Longrightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} = x - 2y \\ -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} = 2y - 2x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} E_{P(x)} = -\displaystyle\int (x - 2y)\,dx \\ E_{P(y)} = -\displaystyle\int (2y - 2x)\,dy \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} E_{P(x)} = \quad -\dfrac{x^2}{2} + 2yx + C \\ E_{P(y)} = -y^2 + 2xy + C \end{cases}$$

Enfin :

$$E_P = -\frac{x^2}{2} - y^2 + 4xy + C$$

Exercice 3 :

1) La hauteur minimale h_{min} à partir de laquelle la bille est lancée pour arriver à O' sans qu'elle ne quitte la gouttière.

En absence de frottement :

<u>Du point A au point O</u> : $\Delta E_m = 0 \Longrightarrow E_{m(O)} - E_{m(A)} = 0$

$$\begin{cases} E_{m(A)} = \frac{1}{2} m\, v_A{}^2 + m\, g\, h_{(A)} \\ E_{m(O)} = \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 + m\, g\, h_{(O)} \end{cases}$$

Sachant que : $v_A = 0$, $h_{(A)} = h$, $h_{(O)} = 0$, on aura :

$$\begin{cases} E_{m(A)} = m\, g\, h \\ E_{m(O)} = \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 \end{cases} \Longrightarrow m\, g\, h - \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 = 0$$

$$\Longrightarrow h = \frac{v_O{}^2}{2g} \dots\dots\dots (1)$$

<u>Du point O au point O'</u> :

$\Delta E_m = 0 \Longrightarrow E_{m(O')} - E_{m(O)} = 0$

$$\begin{cases} E_{m(O)} = \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 + m\, g\, h_{(O)} \\ E_{m(O')} = \frac{1}{2} m\, v_{O'}{}^2 + m\, g\, h_{(O')} \end{cases}$$

Sachant que : $h_{(O')} = 2r$, $h_{(O)} = 0$, on aura :

$$\begin{cases} E_{m(O)} = \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 \\ E_{m(O')} = \frac{1}{2} m\, v_{O'}{}^2 + 2\, m\, g\, r \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2} m\, v_O{}^2 - \frac{1}{2} m\, v_{O'}{}^2 - 2\, m\, g\, r = 0$$

$$\Longrightarrow v_O{}^2 = v_{O'}{}^2 + 4gr \dots\dots\dots (2)$$

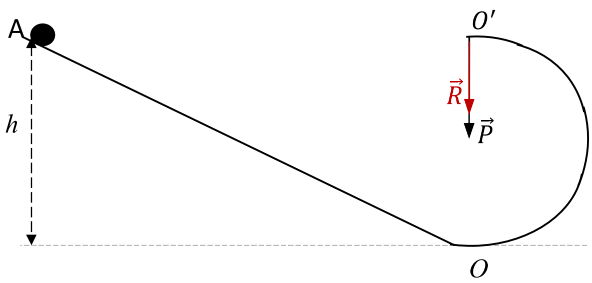
$(1)\ et\ (2) \Longrightarrow v_{O'}{}^2 = 2gh - 4\, g\, r$

(P.F.D.) : $\sum \vec{F} = m\, \vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\, \vec{a}$

$$P + R = m\, a_N \Longrightarrow R = m \frac{v_{O'}{}^2}{r} - mg$$

$$\Longrightarrow R = m\, \frac{(2gh - 4\, g\, r)}{r} - mg$$

$$\Longrightarrow R = \frac{2mgh}{r} - 5m\, g$$



Pour que la bille ne quitte pas la gouttière en O', il faut que la force de réaction R ne soit pas nulle (c'est R qui retient la bille à la gouttière)

$$R \geq 0 \Longrightarrow \frac{2mgh}{r} - 5m\,g \geq 0$$

$$\Longrightarrow h \geq \frac{5}{2} r$$

La valeur minimale de la hauteur qui permet à la bille d'atteindre O' sans qu'elle ne quitte la gouttière est $h_{min} = \frac{5}{2} r$

2) La vitesse et l'énergie totale au point O

$$(1) \Longrightarrow v_O = \sqrt{2\,h\,g}$$

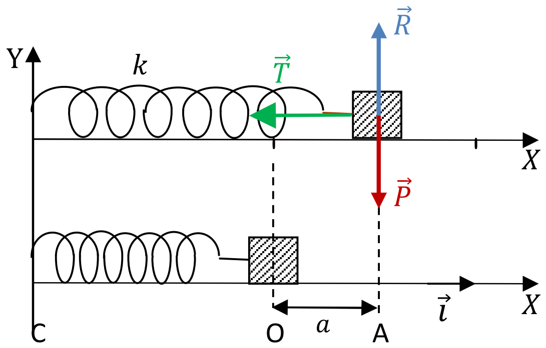
$$\Longrightarrow v_O = \sqrt{2\,g\,\frac{5}{2} r}$$

$$\Longrightarrow v_O = 4.95\; m/s$$

$$E_{T(O)} = E_{c(O)} + E_{P(O)}$$

$$E_{P(O)} = 0 \Longrightarrow E_{T(O)} = E_{c(O)} = \frac{1}{2} m {v_O}^2$$

$$\Longrightarrow E_{T(O)} = 1.22\; J$$



Exercice 4 :

1) La vitesse v_O sans considérer les frottements :

$$\Delta E_c = \sum W$$

$$\sum W = W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{R})} + W_{(\vec{P})}$$

Alors : $\Delta E_c = W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{R})} + W_{(\vec{P})}$

Or :

$W_{(\vec{R})} = W_{(\vec{P})} = 0$ car $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires au déplacement.

$$\sum W = W_{(\vec{T})} = \int \vec{T}\,\overrightarrow{dr} = \int_a^0 (-kx\,\vec{\imath}\,)\,(dx\vec{\imath})$$

$$W = W_{(\vec{T})} = \int_{x_A=a}^{x_O=0} -kx\,dx \Longrightarrow W = k\int_{x_O=0}^{x_A=a} x\,dx$$

$$x_A - x_O = dx = a \Rightarrow a\vec{\imath} = (x_A - x_O)\vec{\imath} = \overrightarrow{OA}$$

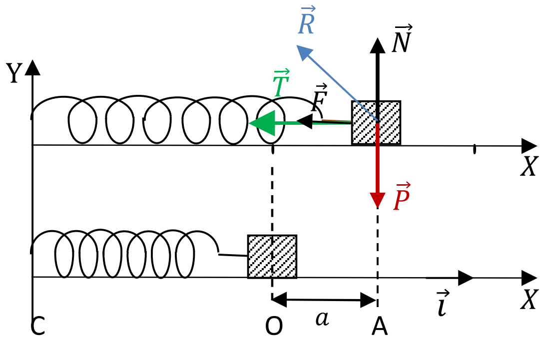
$$\sum W = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \Longrightarrow \sum W = \frac{ka^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \Delta E_c = \frac{ka^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}m{v_O}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \frac{ka^2}{2}$$

Sachant que : $v_A = 0$

$$\frac{1}{2}m{v_O}^2 = \frac{ka^2}{2} \Longrightarrow v_O = a\sqrt{\frac{k}{m}}$$



2) La vitesse v_O en présence d'une force de frottement de coefficient μ_d:

$$\Delta E_c = \sum W$$

$$\sum W = W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{R})} + W_{(\vec{P})} + W_{(\vec{F})}$$

$$\Delta E_c = W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{R})} + W_{(\vec{P})} + W_{(\vec{F})}$$

Or :

$$W_{(\vec{R})} = W_{(\vec{P})} = 0$$

$$\Delta E_c = W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{F})}$$

$$W_{(\vec{T})} = \int \vec{T}\,\overrightarrow{dr} = \int_a^0 (-kx\,\vec{\imath}\,)\,(dx\vec{\imath}) \Longrightarrow W_{(\vec{T})} = \frac{ka^2}{2} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$W_{(\vec{F})} = \int \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = \int_{x_A=a}^{x_O=0} F\ \ dx$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{F}{N} = \mu_d \Longrightarrow F = N\,\mu_d \\ \quad N = mg \end{cases} \Longrightarrow F = mg\,\mu_d$$

$$W_{(\vec{F})} = \int_{x_A=a}^{x_O=0} mg\,\mu_d\,dx = mg\,\mu_d[x]_a^0 \Longrightarrow W_{(\vec{F})} = -m\,g\,\mu_d\,a \ldots\ldots\ldots (2)$$

En additionnant (1) et (2) :

$$W_{(\vec{T})} + W_{(\vec{F})} = \frac{ka^2}{2} - a\,m\,g\,\mu_d$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_O{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \frac{ka^2}{2} - a\,m\,g\,\mu_d$$

Sachant que : $v_A = 0$

$$\frac{1}{2}mv_O{}^2 = \frac{ka^2}{2} - a\,m\,g\,\mu_d \Longrightarrow v_O = \sqrt{\frac{ka^2}{m} - 2\,a\,g\,\mu_d}$$

Exercice 5 :

1) L'énergie totale aux points : A, B et C

$$E_T = E_M = E_C + E_P$$

$$\begin{cases} E_{M(A)} = E_{C(A)} + E_{P(A)} = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + mgh \\ E_{M(B)} = E_{C(B)} + E_{P(B)} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + mgh_0 \\ E_{M(C)} = E_{C(C)} + E_{P(C)} = \frac{1}{2}mv_C{}^2 + mgh_0 \end{cases}$$

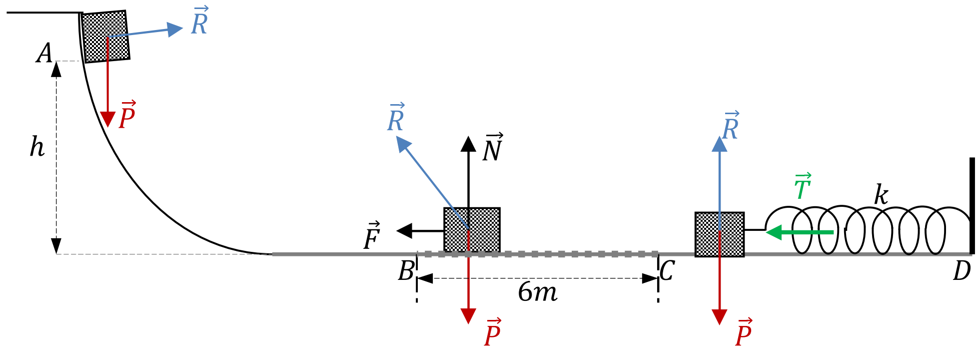
Or :

$$v_A = 0 \Longrightarrow E_{C(A)} = 0$$

$$h_0 = 0 \Longrightarrow E_{P(B)} = E_{P(C)} = 0$$

Alors :

$$\begin{cases} E_{M(A)} = E_{P(A)} = mgh \\ E_{M(B)} = E_{C(B)} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 \\ E_{M(C)} = E_{C(C)} = \frac{1}{2}mv_C{}^2 \end{cases}$$



$v_B = ?$, $v_C = ?$

$$\sum W = \Delta E_C$$

<u>Le chemin $A \longrightarrow B$:</u>

$$W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$W(\vec{R}) = 0$ car perpendiculaire au déplacement

$$W(\vec{P}) = \int_h^0 P\,dz = \int_h^0 -mg\,dz = mgh$$

$$(1) \Longrightarrow mgh = \frac{1}{2}m{v_B}^2$$

$\Longrightarrow v_B = \sqrt{2gh}$ A.N. : $v_B = 10\,m/s$

<u>Le chemin $B \longrightarrow C$:</u>

$$W(\vec{P}) + W(\vec{N}) + W(\vec{F}) = \frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$W(\vec{P}) = W(\vec{N}) = 0$ car perpendiculaires au déplacement

$$W(\vec{F}) = \int_B^C F\,dz = \int_B^C -N\,\mu_d\,dx = -\,mg\,\mu_d \int_B^C dx = -mg\,\mu_d\,BC$$

$$(2) \Longrightarrow -mg\,\mu_d\,BC = \frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2$$

$$\Longrightarrow v_C = \sqrt{{v_B}^2 - 2g\mu_d\,BC}$$

$\Longrightarrow v_C = \sqrt{2gh - 2g\,\mu_d\,BC}$ A.N. : $v_C = 4.49\,m/s$

Finalement :

$$\begin{cases} E_{M(A)} = mgh \\ E_{M(B)} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 \Longrightarrow E_{M(B)} = mgh \\ E_{M(C)} = \frac{1}{2}m{v_C}^2 \Longrightarrow E_{M(C)} = mg(h - \mu_d\,BC) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E_{M(A)} = 500\,J \\ E_{M(B)} = 500\,J \\ E_{M(C)} = 101\,J \end{cases}$$

L'énergie mécanique totale est conservée du point A au point B $\left(E_{M(A)} = E_{M(B)}\right)$, cependant du point B au point C, elle n'est pas conservée mais il existe une diminution à cause de la présence de force de frottement qui est une force non-conservative

2) La compression maximale du ressort :

On suppose que le point E correspond à la position ou le ressort est compressé au maximum.

Entre le point C et le point $E,$ l'énergie mécanique totale est conservée, ainsi :

$\Delta E_M = 0 \implies E_{M(C)} = E_{M(E)}$

$E_{M(C)} = mg(h - \mu_d\, BC)$

$E_{M(E)} = E_{P(ressort)} + E_{Cin(ressort)} + E_{P(bloc)} + E_{Cin(bloc)}$

$$E_{P(ressort)} = -\int -kx\, dx \implies E_{P(ressort)} = \frac{1}{2}kx^2$$

$E_{Cin(ressort)} = 0$ car le ressort est comprimé totalement (pas de mouvement, pas de vitesse donc pas d'énergie cinétique)

$$E_{P(bloc)} = -\int mg\,\vec{j}\ \ dx\,\vec{i} = 0$$

$E_{Cin(bloc)} = 0$ car le bloc ne pousse plus le ressort donc il ne bouge pas au point E.

D'où :

$$E_{M(E)} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{M(C)} = E_{M(E)} \implies mg(h - \mu_d\, BC) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\implies x = \sqrt{\frac{2mg}{k}\,(h - \mu_d\, BC)}$$

A.N. : $x = 0.3\ m$

Références :

[1] S. Pommier et Y. Berthaud « Mécanique générale » -Dunod, 2010.

[2] V. Glavieux, « unités de mesure cherchent étalon » *La Recherche* n° 499, 2015.

[3] John D. Barrow « les constantes de la natures » -Odile Jacob 2005.

[4] Roland Omnès « Révélation des lois de la nature » - Odile Jacob 2008.

[5] Travaux dirigés de mécanique de point -A. Le Padellec et M. Mourgues- univ Toulouse, 2011-2012.

[6] Introduction à la mécanique du point- Travaux dirigés-Université de Cergy-Pontoise S1-MPI, 2013.

[7] Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, 2013.