وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de Maghnia
Institut des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Conceil Scientifique

المركز الجامعي مغنية
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
المجلس العلمي

رقم المرجع : 074/2024

مستخرج محضر المجلس العلمي

في اجتماعه المنعقد بتاريخ 2024/10/17، صادق المجلس العلمي لمعهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير للمركز الجامعي مغنية على قبول المطبوعة الموسومة بعنوان:"**محاضرات في مقياس الاحصاء 3+4** "، التي تم إعدادها من قبل الدكتورة **طالب سمية**، والموجهة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية وعلوم التسيير، وهذا بناء على رأي المحكمين الايجابي حول المطبوعة. على أن يتم إيداعها في مكتبة المعهد قصد السماح للطلبة بالاطلاع على محتواها .

رئيس المجلس العلمي

أ.د. ساهد عبد القادر
رئيس المجلس العلمي

مدير المعهد

مكيديش محمد
مدير معهد العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المركز الجامعي –مغنية–

معهد العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية LMD تخصص إقتصاد + تسيير

المقياس:

الإحصاء (03) + (04).

السنة الجامعية: 2023–2024.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المركز الجامعي –مغنية–

معهد العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية LMD تخصص إقتصاد + تسيير

المقياس:

الإحصاء (03) + (04).

السنة الجامعية: 2023–2024.

Sommaire

مقدمـــة:

يمثل الإحصاء مجمل الطرق الرياضية المتعلقة بجمع، تقديم، دراسة و تحليل مجموعة من البيانات متعلقة بالظاهرة موضوع الدراسة و ينقسم إلى مستويين:

I- الإحصاء الوصفي:

يهتم بجمع و تمثيل و دراسة البيانات.

II- الإحصاء الرياضي (الإحصاء 3+ الإحصاء 4):

يهتم بتقدير معلمات المجتمع المتميزة (الوسط الحسابي، التباين، النسبة،...) انطلاقا من القيم المحسوبة في العينات و ذلك بشرط أن تكون هذه العينات ممثلة تمثيلا صادقا لصفات المجتمع.

ينقسم البرنامج السنوي إلى قسمين: الإحصاء3 و الاحصاء 4.

1- **الإحصاء 3**: يحتوي على أربع محاور و هي:

- **المحور الأول**: أهم قوانين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة.
- **المحور الثاني**: أهم قوانين التوزيعات الإحتمالية المتصلة.
- **المحور الثالث**: تقارب بعض التوزيعات الإحتمالية.

2- **الإحصاء 4**: يحتوي على ثلاث محاور:

- **المحور الأول**: نظرية العينات.
- **المحور الثاني**: نظرية التقدير.
- **المحور الثالث**: اختبار الفرضيات.

الإحصاء رقم (03):

محتوى المادة التعليمية:

- المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة.
- المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الإحتمالية المتصلة.
- المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات الإحتمالية

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة.

1- توزيع ذي الحدين

2- التوزيع البواسوني

3- التوزيع الهندسي

4- التوزيع الهندسي الزائدي

المحاضرة رقم (01): توزيع ذي الحدين.

تمهيد:

-نعتبر تجربة عشوائية و حادث معين A احتمال وقوعه P (نعتبر وقوعه نجاحا).

-نعيد هذه التجربة n مرة في نفس الظروف (لتحقيق استقلال الحوادث).

-نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد مرات ظهور الحادث (عدد النجاحات) خلال n تجربة.

-نقول أن: -x: يخضع لتوزيع ذي الحدين.

$$x \in \{0,1,2,\dots\dots,n\}$$

$$x \rightarrow B(n,p)$$

$$P(x = x_i) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

مثال (01):

-يحتوي صندوق على كرات بيضاء بنسبة p و كرات سوداء بنسبة q=1-p، نسحب 3 كرات من هذا الصندوق، الواحدة تلوى الأخرى و بالإرجاع.

-نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المحصل عليها.

$X=x_i$	الحالات المواتية	الإحتمالات
0	NNN	q^3p^0
1	BNN ,NBN ;NNB	$pq^2+q^2p+pq^2=3pq^2$
2	BBN,BNB ,NBB	$p^2q+p^2q+qp^2=3qp^2$
3	BBB	p^3q^0

$$x \in \{0,1,2,3\}$$

$$x \rightarrow B(3,p)$$

$$P(x = x_i) = C_3^x p^x (1-p)^{3-x}$$

مثال (02):

-يلعب فريق في دورة معينة 4 مقابلات، احتمال فوزه بالمقابلة الواحدة p=0,6.

-نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد المقابلات التي يفوز بها هذا الفريق خلال الدورة.

X: متغير عشوائي يمثل عدد المقابلات التي يفوز بها الفريق.

$x \in \{0,1,2,3,4\}$

$x \to B(4, 0{,}6)$

$P(x = x_i) = C_4^x 0{,}6^x (0{,}4)^{4-x}$

-مجموع الإحتمالات:

$$\sum_{x=0}^{n} p(x = x_i) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = 1$$

$$= [p + (1-p)]^n = 1^n = \mathbf{1}$$

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} xp(X = x_i)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} xc_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$E(X) = n \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$x^{-} = x - 1$:

$$E(X) = n \sum_{x^{-}=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^{-}!\,(n-1-x^{-})!} p^{x^{-}+1}(1-p)^{n-1-x^{-}}$$

$$= np \sum_{x^{-}=0}^{n-1} C_{n-1}^{x^{-}} p^{x^{-}} (1-p)^{n-1-x^{-}}.$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}.$$

$$= np(p + 1 - p)^{n-1}.$$

$$= np(1)^{n-1}.$$

$$\boldsymbol{E(X) = np}.$$

–التباين:

$$\boldsymbol{V(x) = E(x^2) - E^2(x)}.$$

$$E(X) = np.$$

$$\boldsymbol{E(x^2)} = ?$$

$$E[x(x-1)] = a \Rightarrow E(x^2 - x) = a$$

$$\Rightarrow E(x^2) - E(x) = a.$$

$$\Rightarrow E(x^2) = E(x) + a.$$

$$a = ?$$

$$a = E[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)p(x = x_i).$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) c_n^x p^x (1-p)^{n-x}.$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

$$a = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}.$$

$x^{-} = x - 2$:

$$a = n(n-1)\sum_{x^{-}=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{-}!\,(n-2-x^{-})!}p^{x^{-}+2}(1-p)^{n-2-x^{-}}.$$

$n - x = n - (x^{-} + 2) = n - x^{-} - 2.$

$a = n(n-1)\rho^{2}\sum_{x'=0}^{n-2} C_{n-2}^{x'}\,\rho^{x'}(1-\rho)^{(n-2)-x'}$

$= n(n-1)\rho^{2}[\rho + (1-\rho)]^{n-2}$

$\boxed{a = n(n-1)\rho^{2}}$

$V(x) = E(x^{2}) - E^{2}(x)$

$E(x^{2}) = a + E(x) = n(n-1)\rho^{2} + n.\rho$

$V(x) = n(n-1)p^{2} + n\rho - n^{2}p^{2}$

$= n^{2}\rho^{2} - n\rho^{2} + n\rho - n^{2}\rho^{2}$

$= n\rho(1-\rho) = n.\rho.q \qquad /q = 1-\rho$

$\boxed{V(x) = n.\rho.q}$

سلسلة عمل موجه رقم (01)

التمرين الأول:

في معهد معين، احتمال تخرج طالب ما بعد 5 سنوات من الدراسة هو 0,4.

ليكن x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المتخرجين بعد 5 سنوات في فوج من 40 طالب.

1- ما هو التوزيع الإحتمالي ل x؟ احسب توقعه و تباينه؟

2- احسب احتمال:

" A: عدد الطلبة المتحرجين بعد 5 سنوات هو 10".

"B: عدد الطلبة المتخرجين بعد 5 سنوات لا يقل عن 3"

الحل:

1- **التوزيع الإحتمالي لـ x:**

X: متغير عشوائي يمثل عدد المتخرجين بعد 5 سنوات في فوج من 40 طالب .

$$x \to B(n,p)$$

$$x \to B(40{,}0.4)$$

$$x \in \{0,1,2,3,\dots\dots,40\}$$

$$P(x = x_i) = C_{40}^{x}(0{,}4)^{x}(0{,}6)^{40-x}$$

$$E(X) = np.$$

$$E(X) = (40)(0{,}4) = 16.$$

$$\mathrm{V(x)} = \mathrm{n.\rho.q} = (40)(0{,}4)(0{,}6) = 9{,}6$$

2- **حساب احتمال الحوادث:**

" **A: عدد الطلبة المتحرجين بعد 5 سنوات هو 10**".

$\underline{\rho(x = 10) =?}$

$$\rho(x = 10) = C_{40}^{10}(0{,}4)^{10}(0{,}6)^{30} = \frac{40!}{10!30!}(0{,}4)^{10}(0{,}6)^{30}$$

$$= \frac{40\times39\times38\times37\times36\times35\times34\times33\times32\times31\times30!}{10!30!}(0,4)^{10}(0,6)^{30}$$

$$\boxed{\rho(x = 10) = 0,0196}$$

B": عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات لا يقل عن 03".

<u>$\boldsymbol{\rho(B) = \rho(x \geq 3) = ?}$</u>

$\overline{B}$" عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات لا يزيد عن 02".

$$\rho(\overline{B}) = \rho(x \leq 2)$$

$$\rho(\overline{B}) = \rho(x = 0) + \rho(x = 1) + \rho(x = 2)$$

$$= C_{40}^{0}(0,4)^{0}(0,6)^{40}+C_{40}^{1}(0,4)^{1}(0.6)^{39}+C_{40}^{2}(0,4)^{2}(0,6)^{38}$$

$$= (0,6)^{40}+40(0,4)(0,6)^{39}+\frac{40!}{2!38!}(0,4)^{2}(0,6)^{38}$$

$$= 5.10^{-7}$$

$$\rho(B) = 1 - \rho(\overline{B}) = 1 - 5.10^{-7} = 0,99$$

$$\boxed{\rho(B) = 0,99}$$

<u>**التمرين الثاني:**</u>

لاحظ تاجر أنه من بين كل 20 شخصا يدخلون محله، 04 منهم يشترون.

ذات يوم دخل 30 شخص إلى محل التاجر.

ليكن x المتغير الذي يمثل عدد المشترين في هذا اليوم.

1-ما هو التوزيع الإحتمالي لـ x ؟ أحسب توقعه وتباينه.

2-أحسب احتمال أن يكون عدد المشترين في هذا اليوم: (03)، لا يقل عن (02)، لا يزيد عن (27).

الحل:

1- التوزيع الإحتمالي لـ x:

X: متغير عشوائي يمثل عدد المشترين في اليوم.

$x \to B(n,p)$

$x \to B(30{,}0.2)$

P=4 /20=0 ,20

$x \in \{0,1,2,3,\dots\dots,30\}$

$P(x = x_i) = C_{30}^{x}(0{,}2)^{x}(0{,}8)^{30-x}$

$E(X) = np.$

$E(X) = (30)(0{,}2) = 6.$

$\mathrm{V(x) = n.\rho.q} = (30)(0{,}2)(0{,}6) = 4{,}8.$

2- حساب احتمال أن يكون:

" **A**: عدد المشترين في هذا اليوم **03**".

$\underline{\boldsymbol{\rho(A) =?}}$

$\rho(A) = \rho(x = 3) = C_{30}^{3}(0{,}2)^{3}(0{,}8)^{27}$

$= \frac{30!}{3!27!}(0{,}2)^{3}(0{,}8)^{27}$

$= \frac{30\times29\times28\times27!}{3\times2\ 27!}(0{,}2)^{3}(0{,}8)^{27}$

$= 4060 \times 0{,}008 \times 0{,}0024 = 0{,}078$

$\boxed{\rho(x = 3) = 0{,}078}$

"**B**: عدد المشترين في هذا اليوم لا يقل عن **02**".

$\rho(B) = \rho(x \geq 2)$

$\qquad = 1 - \rho(\bar{B})$

$= 1 - \rho(x < 2)$

$= 1 - [\rho(x = 0) + \rho(x = 1)]$

$= 1 - [C_{30}^{0}(0,2)^{0}(0,8)^{30} + C_{30}^{1}(0,2)^{1}(0,8)^{29}]$

$= 1 - [(0,8)^{30} + 30(0,2)^{1}(0,8)^{29}]$

$= 1 - 0,0105$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(B) &= \rho(x \geq 2)\\ &= 0,989\end{aligned}}$$

"C: عدد المشترين في هذا اليوم لا يزيد عن **27**".

<u>$\boldsymbol{\rho(x \leq 27) = ?}$</u>

$\rho(C) = \rho(x \leq 27)$

$= 1 - \rho(\bar{C})$

$= 1 - \rho(x > 27)$

$= 1 - [\rho(x = 28) + \rho(x = 29) + \rho(x = 30)]$

$= 1 - [C_{30}^{28}(0,2)^{28}(0,8)^{2} + C_{30}^{29}(0,2)^{29}(0,8)^{1} + C_{30}^{30}(0,2)^{30}(0,8)^{0}]$

$= 1 - [\frac{30!}{28!2!}(0.2)^{28}(0,8)^{2} + 30(0,2)^{29}(0,8) + 1(0,2)^{30}(1)]$

تمارين إضافية:

التمرين الأول:

بينت دراسة في إدماج الطلبة المتخرجين من الجامعة مايلي:30% يجدون عملا فورا، 50% يلتحقون بالخدمة الوطنية، 20 % يواصلون الدراسات العليا. تم اختيار 15 طالب لا على التعيين من دفعة معينة، المطلوب:

1- احتمال أن يواصل 5 طلبة الدراسات العليا؟

2- احتمال أن يلتحق 6 طلبة على الأقل بالخدمة الوطنية؟

3- احتمال أن يجد طلبان العمل فورا؟

التمرين الثاني:

يتكون جهاز الدفع للطائرات التجارية من 4 محركات تعمل بشكل مستقل عن بعضها البعض، إذا كان احتمال إصابة إحدى المحركات بعطب يساوي 0,02، المطلوب ما يلي:

1- ما هو احتمال ألا تقع أي إصابة أثناء الطيران؟

2- ما هو إحتمال ألا تقع أكثر من إصابة؟

3- ما هو إحتمال ألا تقع على الأقل إصابة؟

التمرين الثالث:

عند إختبار أحد اللقاحات ضد مرض معين على عينة تتكون من 100 شخص لوحظ أن 68 منهم ظهرت عليهم علامة الشفاء، و حسب التجربة تبين أن نصفهم لم يصابوا بالمرض عند عدم استعمال اللقاح.

المطلوب ما يلي:

1- ما هي الملاحظات التي يمكن وضعها حول هذا اللقاح؟

المحاضرة رقم (02): التوزيع البواسوني

تمهيد:

هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يقيس عدد تكرارات حادث في مدة زمنية أوحجم معين، وذلك بفرض:

1. معرفة القيمة المتوسطة لعدد تكرارات الحادث في مدة زمنية معينة أو حجم معين، ونرمز لهذه القيمة المتوسطة بـ: λ.
2. عدد تكرارات الحادث يتناسب مع طول المدة أو الحجم.
3. احتمال تكرار الحادث أكثر من مرة واحدة يؤول إلى الصفر إذا كان طول المدة أو الحجم يؤول إلى الصفر.

حيث:

1- x: عدد تكرارات الحادث في المدة (الحجم).

2- x: يخضع إلى توزيع بواسون

$$x \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

3- $x \in \{0,1,2,3,\dots\dots..\}$

4-

$$\boldsymbol{\rho(x = x_i) = e^{-\lambda}. \frac{\lambda^x}{x!}}$$

-مجموع الاحتمالات:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}. e^{\lambda}$$

$$= 1$$

- التوقع الرياضي$E(X)$:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} xi\, \rho(x = xi)$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

نضع:

$$x' = x - 1$$

$$E(x) = e^{-\lambda} \sum_{x'=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x'+1}}{x'!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x'=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x'}}{x'!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda e^{+\lambda}$$

$$= \lambda$$

$$E(x) = \lambda.$$

- التباين:

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$\underline{\mathbf{E(x^2) =?}}$

$$E\big(x(x-1)\big) = a$$

$$E(x^2 - x) = a$$

$$E(x^2) - E(x) = a$$

$$E(x^2) = a + E(x)$$

$$E(x^2) = a + \lambda$$

a =?

$$a = \mathrm{E}\big(\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)\big)$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\rho(x = xi)$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$

$$x' = \mathrm{x}-2$$

$$E\big(x(x-1)\big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x'=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{x'+2}}{x'!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x'=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{x'}\lambda^2}{x'!}$$

$$= e^{-\lambda}.e^{+\lambda}.\lambda^2 = \lambda^2$$

$$\boxed{E\big(X(X-1)\big) = \lambda^2}$$

$$E(x^2) = a + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$V(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$V(x) = \lambda$$

المجلس العلمي للمعهد

سلسلة عمل موجه (02)

التمرين الأول:

متوسط عدد الجرائد المباعة يوميا في كشك معين هو 100.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الجرائد المباعة في هذا الكشك يوميا؟

2- احسب احتمال أن يكون عدد الجرائد المباعة في هذا الكشك خلال يوم ما.

"A: 90 جريدة"،

"B: 04 جرائد على الأقل".

الحل:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

x: متغير عشوائي يمثل عدد الجرائد المباعة في هذا الكشك يوميا.

$$x \in \{0,1,2 \dots\}$$

$$\lambda = 100,$$

$$x \hookrightarrow \mathcal{P}(100)$$

$$\rho(x = x_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\rho(x = xi) = e^{-100} . \frac{100^x}{x!}$$

$$\boxed{E(x) = V(x) = \lambda = 100}$$

2- حساب احتمال:

"A:عدد الجرائد المباعة في الكشك 90 جريدة".

$$\rho(A) = \rho(x = 90) = e^{-10} . \frac{100^{(90)}}{90!}$$

"B: عدد الجرائد المباعة في الكشك خلال يوم ما هي 4 جرائد على الأقل".

"$\overline{B}$: عدد الجرائد المباعة في الكشك خلال يوم ما هي **3** جرائد على الأكثر".

$$\rho(B) = 1 - \rho(\overline{B})$$
$$= 1 - \rho(x \leq 3)$$
$$= 1 - [\rho(x = 0) + \rho(x = 1) + \rho(x = 2) + \rho(x = 3)]$$

$$\rho(x \geq 4) = 1 - \rho(x \leq 3)$$
$$= 1 - \left[e^{-100} . \frac{(100)^0}{0!} + e^{-100} . \frac{(100)^2}{2!} + e^{-100} . \frac{(100)^3}{3!}\right]$$
$$= 1 - e^{-100}\left[1 + 100 + 5000 + \frac{500.000}{3}\right]$$
$$\rho(B) = 1 - e^{-100} . \frac{515.303}{3}$$

التمرين الثاني:

يتوافد الأشخاص على مصلحة إدارية بقيمة متوسطة قدرها 180 شخص في الساعة.

نعرّف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لـ x ؟

2- احسب توقعه وتباينه.

3- أحسب احتمال أن لا قل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين.

الحل:

1- التوزيع الاحتمالي لـ x:

"x:يمثل عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة".

$$\lambda = \frac{180}{60}$$
$$= 3$$
$$\lambda = 3$$

$x \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$

$x \in \{0,1,2, \ldots, \ldots\}$

$\rho(x = x_i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$

$\qquad = e^{-3} . \dfrac{3^x}{x!}$

2- $E(x) = \lambda = 3$

$V(x) = \lambda = 3$

3-أحسب احتمال:

" **A**: عدد المتوافدين على المصلحة خلال دقيقة معينة لا يقل عن شخصين"

$\rho(A) = \rho(x \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
\rho(A) &= 1 - \rho(\overline{A}) \\
&= 1 - \rho(x < 2) \\
&= 1 - [\rho(x = 1) + \rho(x = 0)] \\
&= 1 - \left[e^{-3} . \frac{3^1}{1!} + e^{-3} . \frac{3^0}{0!}\right] \\
&= 1 - [3e^{-3} + e^{-3}] \\
&= 1 - [4e^{-3}] \\
&= 1 - 4e^{-3} \\
&= 0{,}8008
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\rho(A) = \rho(x \geq 2) = 1 - 4e^{-3} = 0{,}8008}$$

تمارين إضافية

التمرين الأول:

إن احتمال وقوع حادث مرور يساوي 0,05 في منعرج خطير تمر عبره 100 سيارة في الساعة في المتوسط، المطلوب ما يلي:

1- ما هو احتمال وقوع حادثين على الأقل خلال ساعة من اليوم؟
2- ما هو احتمال وقوع حادثين فقط؟
3- ما هو احتمال وقوع 3 حوادث على الأكثر خلال ساعة من اليوم؟

التمرين الثاني:

يختص مصنع في إنتاج قطعا معدنية بجودة عالية،حيث أن عدد القطع المرفوضة تساوي 5بالألف، أخذت عينة عشوائية حجمها 600 قطعة، المطلوب ما يلي:

1- إذا فرضنا أن المتغير العشوائي هو عدد القطع المرفوضة، فما هو التوزيع الذي يخضع له هذا المتغير؟ ثم استنتج التوقع و التباين؟
2- احسب احتمال رفض أكثر من 4 قطع؟
3- احسب احتمال رفض قطعتين على الأكثر؟
4- احسب احتمال رفض قطعتين؟

التمرين الثالث:

تبلغ مدة تنقل مصعد من طابق إلى طابق آخر 10 ثواني في المتوسط، وإذا علمنا أن البناية تتكون من 9 طوابق.

المطلوب ما يلي:

1- ما هي مدة انتظار شخص يوجد في الطابق الأول ليصله المصعد؟
2- أحسب تباين هذا التوزيع؟

التمرين الرابع:

يتلقى موزع مكالمات هاتفية 75 مكالمة هاتفية في المتوسط خلال ساعة معينة، المطلوب ما يلي:

1- احتمال أن تصل 4 مكالمات خلال دقيقتين؟

2- احتمال ان تصل 4 مكالمات على الأقل خلال دقيقتين؟

3- احتمال أن تصل 3 مكالمات على الأقل خلال دقيقتين؟

4- ما هو العدد المتوقع خلال 4 دقائق؟

التمرين الخامس:

إن العدد المتوسط للسيارات التي تتوقف للتزود بالبنزين في إحدى المحطات هو 6 سيارة في 15 دقيقة، المطلوب:

1- ما هو إحتمال أن تتوقف سيارتان على الأقل خلال 10 دقائق؟

2- ما هو إحتمال أن تتوقف سيارتان على الأقل خلال 10 دقائق؟

3- ما هو احتمال أن تتوقف 4 سيارات على الأكثر في 15 دقيقة؟

المحاضرة رقم (03): التوزيع الهندسي (توزيع باسكال) (loi géométrique)

1. صياغة القانون الإحتمالي لتوزيع باسكال أو التوزيع الهندسي:

يتعلق الأمر في حالة توزيع باسكال بتكرار التجربة n مرة، حيث هنا نهتم بمرتبة x أين تظهر حادثة النجاح للمرة الأولى.

علما أن الحوادث مستقلة (السحب بالإعادة) أي احتمال النجاح يكون ثابتا.

تعريف: إن قانون المتغير X الذي يدل على أن عدد السحب حتى الحصول على أول سحب مرغوب فيه (أو حتى الحصول على نجاح التجربة)، يحمل اسم قانون باسكال، وتكون صيغته بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{\rho(x = x_i) = q^{x-1}.\rho \quad ; \quad x \in N - \{0\} \quad , \quad x \in N^*}$$

مثال: يحتوي صندوق على 8 كرات (5 بيضاء و3 سوداء).

قمنا بسحب 3 كرات.

المطلوب:

1- ما هو احتمال الحصول على الكرة البيضاء للمرة الأولى في السحب الثالث (السحب الإعادة)؟

2- ما هو احتمال الحصول على الكرة البيضاء للمرة الأولى (السحب بالإعادة) ؟

3- ما هو احتمال ظهور كرتين بيضاء (السحب الإعادة) ؟

4- ما هو احتمال ظهور كرتين بيضاء (السحب بدون إعادة) ؟

الحل:

المتغير العشوائي المدروس هو ظهور الكرة البيضاء للمرة الأولى، وعند ظهورها للمرة الأولى يتوقف السحب أو تنتهي التجربة، حيث يكون السحب بالإعادة حتى نحافظ على ثبات ظهور الكرة البيضاء.

علما أن:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{5}{8} \\ q = \dfrac{3}{8} \end{cases} \quad ; \quad \rho + q = 1$$

1- **احتمال ظهور الكرة البيضاء للمرة الأولى في السحب الثالث:**

$$\rho(x=3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{45}{512}=0{,}0878$$

ويمكن تعميم هذه الفكرة بالشكل التالي:

$$\rho(x=xi)=q^{x-1}.\rho$$

يسمى هذا القانون بتوزيع باسكال أو التوزيع الهندسي.

2- **احتمال الحصول على الكرة البيضاء للمرة الأولى عند سحب كرة بطريقة عشوائية 3 مرات:**

" **A**: الحصول على الكرة البيضاء للمرة الأولى عند سحب 3 مرات بالإعادة".

$$\rho(A)=\frac{5}{8}+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^{2}\left(\frac{5}{8}\right)=0{,}947$$

3- **احتمال ظهور كرتين بيضاء:**

$$\rho(x=2)=c_n^k p^k.\,q^{n-k}$$

$$=c_3^2\times\left(\frac{5}{8}\right)^{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{1}=3\times 0{,}141=0{,}422$$

4- **احتمال ظهور كرتين بيضاء:**

$$\rho(x=2)=\frac{c_n^x\,c_{N-N_1}^{n-k}}{c_k^n}=\frac{c_5^2.\,c_3^1}{c_8^3}=0{,}535$$

ملاحظة: القانون الهندسي ينطبق على الحالة الأولى (السؤال الأول).

2. المميزات العددية للقانون الهندسي:

- **التوقع (الأمل الرياضي):**

$$E(x)=\sum_{x=1}^{n}x\,\rho(x=X_i)$$

$$= \sum_{x=1}^{n} xq^{x-1} . \rho = \rho \sum_{x=1}^{n} xq^{x-1}$$

يمكن كتابة:

$$\sum_{x=1}^{n} X\, q^{x-1} = \frac{\delta}{\delta q}\left(\sum_{x=0}^{n} q^{x}\right)$$

بما أن: $\sum_{x=0}^{n} q^{x}$ هو عبارة عن متوالية هندسة أساسها q

حيث: $0 \leq q \leq 1$ فإن هذا المقدار يقترب إلى $\frac{1}{1-q}$

وبالتالي: $\frac{\delta}{\delta q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)2}$

$$E(x) = \sum xq^{x-1} . \rho = \rho . \frac{1}{(1-q)2} = \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{\rho}}$$

-التباين:

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$\underline{E(x(x-1)) = ?}$

$$E\big(x(x-1)\big) = \sum_{x=1}^{n} x(x-1)q^{x-1} . \rho$$

حتى تتمكن من الحصول على المتوالية الهندسية التي أساسها q:

$$E\big(x(x-1)\big) = p . q \sum_{x=0}^{n} x(x-1)q^{x-2}$$

حيث:

$$\sum_{x=2}^{n} x(x-1)q^{x-2} = \frac{\delta^2}{\delta q^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{\delta^2}{\delta q^2}\left(\sum_{x=0}^{n} q^x\right) = \frac{2}{p^3}$$

إذن:

$$E\big(x(x-1)\big) = p.q.\frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$E\big(x(x-1)\big) = E(X^2) - E(x)$$

$$E(x^2) = \frac{2q}{p^2} + E(x)$$

$$E(x^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2}$$

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$\boxed{-1 = -(p+q)}$$

$$= \frac{2q+p-1}{p^2}$$

$$= \frac{2q+p-(p+q)}{p^2} = \frac{2q+p-p-q}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{V(x) = \frac{q}{p^2}}$$

تمارين سلسلة عمل موجه رقم 03:

التمرين الأول:

إن احتمال إصابة الهدف من طرف رامي يساوي 0.6، إذا قام برمي 4 رميات، فما هو إحتمال إصابة الهدف للمرة الأولى ؟

الحل:

$p = 0.6$

$q = 0.4$

"A: إصابة الهدف للمرة الأولى عند سحب 4 مرات".

$$P(A) = (0{,}6) + (0{,}6)(0{,}4) + (0{,}4)(0{,}4)(0{,}6) + (0{,}4)(0{,}4)(0{,}4)(0{,}6)$$

$$= 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384$$

$$= 0{,}9744$$

التمرين الثاني:

كيس يحتوي على 8 كرات بيضاء و4 كرات سوداء سحبت من الكيس كرة واحدة مع الإعادة.

المطلوب:

1- إذا كان X يمثل عدد مرات سحب كرة بيضاء. أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي X ؟

2- احتمال ظهور كرة بيضاء في أول سحب من السحبة الخامسة ؟

الحل:

1-

$$p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p + q = 1$$

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$E(x) = 1{,}50$$

$$V(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$V(x) = 0{,}75$$

2- "A: ظهور كرة بيضاء في أول سحب من السحبة الخامسة"

$$P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{243}$$

التمرين الثالث:

كيس يحتوي على 9 كرات سوداء و 4 كرات بيضاء سحبت من الكيس كرة واحدة مع الإعادة.

المطلوب:

1- إذا كان X يمثل عدد مرات سحب كرة سوداء. أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي X ؟

2- احتمال ظهور كرة سوداء في أول سحب من السحبة الرابعة ؟

3- احتمال ظهور كرة سوداء في المرة الأولى عند سحب 4 كرات بالإعادة ؟

4- احتمال ظهور كرة سوداء للمرة الأولى في السحبة الثانية؟

الحل:

1- **x**: م.ع يمثل عدد مرات سحب الكرة السوداء.

$$E(x) = \frac{1}{p} = .1/9/13 = 13/9 = 1{,}44$$

$$p = \frac{9}{13}$$

$$q = \frac{4}{13}$$

$$V(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{4}{13} \times \left(\frac{13}{9}\right)^2$$

$$= \frac{4 \times 13}{9^2} = \frac{52}{81}$$

$$V(x) = 0,6419$$

2- "A:ظهور كرة سوداء في أول سحب من السحبة الرابعة".

$$p(A) = \left(\frac{4}{13}\right)^3 \left(\frac{9}{13}\right) = \frac{576}{28561} = 0,02$$

احتمال ظهور كرة سوداء للمرة الأولى عند سحب 4 كرات بالإعادة.

3- "C: ظهور كرة سوداء للمرة الأولى عند سحب 4 كرات بالإعادة".

$$\mathrm{p} = \frac{9}{13}, \mathrm{q} = \frac{4}{13}$$

$$p(B) = \left(\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{9}{13}\right)$$

المحاضرة رقم (04): التوزيع فوق الهندسي

1- صياغة القانون الاحتمالي للتوزيع فوق الهندسي:

نعتبر صندوق يحتوي على b_1 كرة بيضاء وn_1 كرة سوداء، نسحب منه n كرة بالصدفة ونعرّف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المحصل عليها، نقول أن x يخضع إلى توزيع فوق الهندسي.

$$\boxed{p(x = x_i)\frac{c_{b_1}^{x}c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}}}$$

$$x \hookrightarrow H(n, b_1, n_1)$$

حيث يحقق الشرطين التاليين:

- $0 \leq p(x = xi) \leq 1$
- $\sum\frac{c_{b_1}^{x}c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}} = 1$

2- المميزات العددية للتوزيع فوق الهندسي:

- **الأمل الرياضي أو التوقع $E(x)$:**

$$E(x) = \sum x\frac{c_{b_1}^{x}c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}}$$

$$= \sum x\frac{b_1(b_1-1)!}{x(x-1)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!}n\frac{(n-1)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1)(b_1+n_1-1)!}$$

$$= \frac{b_1 n}{(b_1+n_1)}\sum_{x=1}^{n}\frac{(b_1-1)!}{(x-1)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!} \times \frac{(n-1)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1-1)!}$$

$$= \frac{b_1 n}{(b_1+n_1)}.\sum_{x=1}^{n}\frac{c_{b_1-1}^{x-1}c_{n_1}^{n-x}}{c_{b_1+n_1-1}^{n-1}} = \frac{b_1.n}{b_1+n_1}$$

$$E(x) = np$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E\big(x(x-1)\big) = \sum x(x-1)\frac{c_{b_1}^{x}.c_{n_1}^{n-x}}{c_{b_1+n_1}^{n}}$$

$$= \sum x(x-1)\frac{b_1(b_1-1)!}{x(x-1)(x-2)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!} \times \frac{n(n-1)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1)(b_1+n_1-1)!}$$

$$= \frac{b_1 n}{(b_1+n_1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{(b_1-1)!}{(x-2)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!} \times \frac{(n-1)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1-1)!}$$

$$= \frac{b_1.n}{(b_1+n_1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{(b_1-1)(b_1-2)!}{(x-2)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!} \times \frac{(n-1)(n-2)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1-1)(b_1+n_1-2)!}$$

$$= \frac{b_1.n}{(b_1+n_1)}\frac{(b_1-1)(n-1)}{(b_1+n_1-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{(b_1-2)!}{(x-2)!\,(b_1-x)!} \times \frac{n_1!}{(n-x)!\,(n_1-n+x)!} \times$$

$$\frac{(n-2)!\,(b_1+n_1-n)!}{(b_1+n_1-2)!}$$

$$= \frac{b_1.n}{(b_1+n_1)}.\frac{(b_1-1)(n-1)}{(b_1+n_1-n)}\sum_{x=2}^{n}\frac{c_{b_1-2}^{x-2} \times c_{n_1}^{n-x}}{c_{(b_1+n_1)-2}^{n-2}}$$

$$E\big(x(x-1)\big) = \frac{b_1.n}{(b_1+n_1)}.\frac{(b_1-1)(n-1)}{(b_1+n_1-1)}$$

$$= E(x^2) - E(x)$$

$$E(x^2) = \frac{b_1.n}{(b_1 + n_1)} \cdot \frac{(b_1 - 1)(n - 1)}{(b_1 + n_1) - 1} + \frac{b_1.n}{(b_1 + n_1)}$$

$$V(x) = \frac{b_1.n}{(b_1 + n_1)} \cdot \frac{(b_1 - 1)(n - 1)}{(b_1 + n_1 - 1)} + \frac{b_1.n}{b_1 + n_1} - \left(\frac{b_1 n}{b_1 + n_1}\right)^2$$

$p = \frac{b_1}{(b_1+n_1)}$, $q = \frac{n_1}{(b_1+n_1)}$

$$V(x)$$

$$= \frac{b_1.n}{b_1 + n_1}\left[\frac{(b_1 - 1)(n - 1) + (b_1 + n_1 - 1)(b_1 + n_1) - (b_1 n)(b_1 + n_1 - 1)}{(b_1 + n_1 - 1)(b_1 + n_1)}\right]$$

$$= \frac{b_1.n}{b_1 + n_1} \cdot \frac{(b_1 n - b_1 - n + 1)(b_1 + n_1) + (b_1 + n_1)^2 - (b_1 + n_1) - b_1 n(b_1 + n_1) + b_1 n}{(b_1 + n_1 - 1)(b_1 + n_1)}$$

$$= \frac{b_1.n}{b_1 + n_1} \cdot \frac{(b_1 + n_1)b_1 n - (b_1 + n_1)n + (b_1 + n_1) + (b_1 + n_1)^2 - (b_1 + n_1) - b_1 n(b_1 + n_1) + b_1 n}{(b_1 + n_1 - 1)(b_1 + n_1)}$$

$$= \frac{b_1 n}{(b_1 + n_1)} \cdot \frac{(b_1 + n_1)^2 - (b_1 + n_1)b_1 - (b_1 + n_1)n + b_1 n}{(b_1 + n_1 - 1)(b_1 + n_1)}$$

$$= \frac{b_1 n}{(b_1 + n_1)} \cdot \frac{(b_1 + n_1)(b_1 + n_1 - b_1) - n(b_1 + n_1 - b_1)}{(b_1 + n_1)(b_1 + n_1 - 1)}$$

$$= \frac{b_1.n}{(b_1 + n_1)} \cdot \frac{(b_1 + n_1 - b_1)(b_1 + n_1 - n)}{(b_1 + n_1)(b_1 + n_1 - 1)}$$

$$V(x) = \frac{n.p.q.(b_1 + n_1 - n)}{(b_1 + n_1 - 1)}$$

سلسلة عمل موجه رقم (04):

التمرين الأول:

صندوق يحتوي على 07 قطع معابة و10 قطع صالحة نسحب منه بالصدفة 06 قطع، نعرّف المتغيّر العشوائي x الذي يمثل عدد القطع المعابة المسحوبة.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لـ x ؟

2- احسب توقع وتباين x ؟

3- أحسب احتمال الحصول على: - قطعتين معابتين ؟

- 03 قطع معابة على الأكثر.

الحل:

1- التوزيع الإحتمالي لـ x:

X: متغير عشوائي يمثل عدد القطع المعابة.

$$x \hookrightarrow H(n, b_1, n_1) \Leftrightarrow x \hookrightarrow H(6,7,10)$$

$$x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$\underline{\boldsymbol{p(x = x_i) = ?}}$$

$$p(x = x_i) = \frac{c_{b_1}^{x}\, c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}}$$

$$p(x = x_i) = \frac{c_7^{x}\, c_{10}^{6-x}}{c_{17}^{6}}$$

2- حساب توقع وتباين x:

$$\underline{\boldsymbol{E(x) = ?}}$$

$$E(x) = np$$

$$p = \frac{7}{17}$$

$$= (6)(\frac{7}{17})$$

$$E(x) = 2{,}47 \approx 2$$

<u>$V(x) =?$</u>

$$V(x) = \frac{n.p.q.(b_1 + n_1 - n)}{(b_1 + n_1 - 1)}$$

$$V(x) = \frac{6.(\frac{7}{17}).(\frac{10}{17}).(7 + 10 - 6)}{(7 + 10 - 1)}$$

$$V(x) = 0{,}999 \approx 1$$

3- <u>حساب احتمال الحصول على:</u>

"**A**: قطعتين معابتين"

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{c_7^2 c_{10}^4}{c_{17}^6}$$

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{c_7^2 c_{10}^4}{c_{17}^6}$$

$$p(x = 2) = p(A) = 0{,}356$$

"**B**:الحصول على ثلاث قطع معابة على الأكثر".

"$\overline{\mathbf{B}}$:الحصول على أربع قطع معابة على الأقل".

$$p(B) = p(x \leq 3) = 1 - p(\overline{\mathrm{B}})$$

$$p(B) = p(x \leq 3) = 1 - p(x{>}3)$$

$$p(B) = p(x \leq 3) = 1 - [0{,}127 + 0{,}0169 + 0{,}00056]$$

$$p(B) = p(x \leq 3) = 1 - 0{,}14446$$

$$p(B) = p(x \leq 3) = 0{,}85.$$

التمرين الثاني:

من بين 10 متقدمين بطلب الحصول على وظيفة معينة، 06 يحملون درجة جامعية اختير من بينهم 05 لإجراء مقابلة (الاختيار بالصدفة).

نعرّف المتغيّر العشوائي x الذي يمثل عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة.

1- ما هو التوزيع الإحتمالي لـ x ؟

2- احسب E(x)، V(x) ؟

3- احسب احتمال: - عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين هو 02.

- عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لا يقل عن 02.

- عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لا يقل 01.

الحل:

1- التوزيع الإحتمالي لـx:

X: متغير عشوائي يمثل عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة.

$$x \hookrightarrow H(n, b_1, n_1) \Leftrightarrow x \hookrightarrow H(5,6,4)$$

$$x = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\underline{\boldsymbol{p(x = x_i) =?}}$$

$$p(x = x_i) = \frac{c_{b_1}^{x} c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}}$$

$$p(x = x_i) = \frac{c_6^{x} c_4^{5-x}}{c_{10}^{5}}$$

2- حساب توقع وتباين x:

$$\underline{\boldsymbol{E(x) =?}}$$

$$E(x) = np$$

$$p = \frac{6}{10}$$

$$= (5)(\frac{6}{10})$$

$$E(x) = 3.$$

<u>$\boldsymbol{V(x) =?}$</u>

$$V(x) = \frac{n.p.q.(b_1 + n_1 - n)}{(b_1 + n_1 - 1)}$$

$$V(x) = \frac{5.(\frac{6}{10}).(\frac{4}{10}).(6 + 4 - 5)}{(6 + 4 - 1)}$$

$$V(x) = 0{,}66.$$

1- <u>حساب احتمال:</u>

"**A**: عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين هو:**02**"

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{c_{b_1}^{x} c_{n_1}^{n-x}}{c_{n_1+b_1}^{n}}$$

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{c_6^2 c_4^{5-2}}{c_{10}^5}$$

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{c_6^2 c_4^3}{c_{10}^5}$$

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{\frac{6!}{2!\,4!}\,\frac{4!}{3!\,1!}}{\frac{10!}{5!\,5!}}$$

$$p(x = 2) = p(A) = \frac{60}{252}$$

$$p(x = 2) = p(A) = 0{,}238$$

"**B**: عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لا يقل عن:**02**"

"$\overline{\mathrm{B}}$: عدد حاملي الدرجة الجامعية لا يفوق **01** ".

$$p(B) = 1 - p(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - p(x \leq 1)$$

$$p(B) = 1 - p(x = 1) = 1 - 0{,}0238$$

$$p(B) = 0{,}976$$

"C: عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لا يقل عن:**01**"

$$p(C) = p(x \geq 1)$$

$$p(C) = p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5)$$

$$p(C) = \sum_{i=1}^{5} \frac{C_{b_1}^{x} C_{n_1}^{n-x}}{C_{n_1+b_1}^{n}}$$

$$p(C) = 1.$$

نقول عن الحادث C أنه حادث أكيد.

المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

1- التوزيع الطبيعي.
2- التوزيع المنتظم.
3- التوزيع الأسي.
4- توزيع كاي تربيع.
5- توزيع فيشر.
6- توزيع ستيودنت.

المحاضرة رقم (05): التوزيع الطبيعي.

تمهيد:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، فأغلبية التوزيعات التكرارية للعينات تعدل بتوزيع طبيعي.

المتغير الذي يخضع الى توزيع طبيعي هو متغير مستمر كثافة احتمالية:

$$f = \frac{1}{\delta\sqrt{2\Pi}} \exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^2].$$

- $x \hookrightarrow N(\bar{x}, \delta)$
- δ: عدد حقيقي موجب تماما.
- هذه الدالة موجبة وتكاملها = 1.

ملاحظة:

$E(x) = \bar{x}$ $v(x) = \delta^2$	$\begin{cases}\bar{x} = 0 \\ \delta = 1\end{cases}$ نقول أن: x يخضع إلى توزيع طبيعي قياسي.

حساب الاحتمالات: بالنسبة للتوزيع الطبيعي لا نستعمل التكاملات بل نستعمل الجدول.

$$\rho(x \le y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\delta\sqrt{2\Pi}} \exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^2].$$

On pose :

$$t = \frac{x-\bar{x}}{\delta} \Rightarrow x = \delta t + \bar{x} \Rightarrow \partial\bar{x} = \delta\partial t.$$

$$P(x \le y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-\bar{x}}{\delta}} \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] \delta\partial t.$$

مثال:

يخضع عمر نوع من البطاريات (بالساعات) الى توزيع طبيعي وسطه الحسابي 1000 ساعة وانحرافه المعياري 50 ساعة.

- احسب احتمال أن لا يفوق عمر البطارية 1100 ساعة.

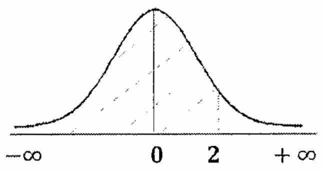
الحل:

x: متغير عشوائي يخضع الى توزيع طبيعي يمثل عمر البطارية.

- $x \hookrightarrow N(1000{,}50)$
- $\underline{\boldsymbol{P(x \leq 1100)}} = ?$
- $t = \frac{x-\bar{x}}{\delta} \Rightarrow x = \delta t + \bar{x}\,; t \hookrightarrow N(0,1)$

$$P(x \leq 1100) = P\left(t \leq \frac{1100-1000}{50}\right)$$

$$= p(t \leq 2)$$



من جدول التوزيع الطبيعي:

$$P = (x \leq 1100) = 0{,}9772$$

- إذن: احتمال أن لا يفوق عمر البطارية 1100 ساعة هو: 0.9772

سلسلة عمل موجهة رقم (05)

التمرين الأول:

ليكن x متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي وسطه الحسابي هو (20) وانحرافه المعياري (03).

1- أحسب:

$P(x \leq 21)$
$P(x \leq 17)$
$p(18 \leq x \leq 21)$
$p(x \geq 19)$

2- عين القيم $a - b - c$ بحيث:

$P(x \leq a) = 0{,}86$

$P(x \geq b) = 0{,}70$

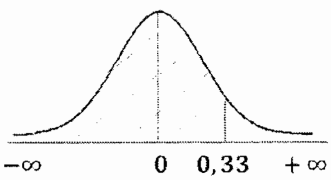
$p(b \leq x \leq c) = 0{,}60$

الحل:

1-

$x \hookrightarrow N(20{,}3)$

1) $\underline{\boldsymbol{P(x \leq 21)}} = ?$



$t = \frac{x-\bar{x}}{\delta} \Rightarrow x = \delta t + \bar{x}\, ; t \hookrightarrow N(0{,}1)$

$$P(x \leq 21) = P\left(t \leq \frac{21-20}{3}\right)$$
$$= p\left(t \leq \frac{1}{3}\right) = P(t \leq 0{,}33)$$

$P(x \leq 21) = P(t \leq 0{,}33)$

$= 0{,}6293$

$$P(x \leq 21) = 0{,}6293$$

2) $\underline{P(x \leq 17) = ?}$

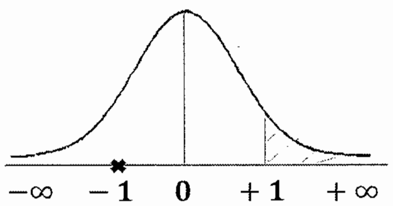
$$t = \frac{x - 20}{3} \Rightarrow x = 3t + 20\,; t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

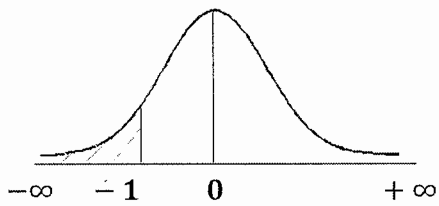
$$P(x \leq 17) = P\left(t \leq \frac{17 - 20}{3}\right)$$

$$= p\left(t \leq -\frac{3}{3}\right)$$

$$= P(t \leq -1)$$

$$= P(t \geq 1)$$





$$= 1 - P(t \leq +1)$$

$$= 1 - 0{,}8413$$

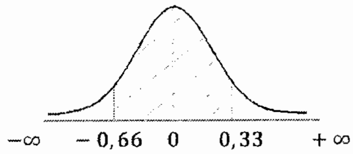
$$= 0{,}1587$$

$$P(x \leq 17) = 0{,}1587$$

3) $\underline{P(18 \leq x \leq 21) = ?}$

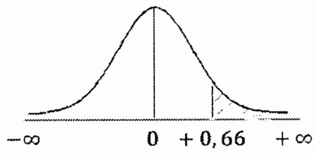
$$P(18 \leq x \leq 21) = P\left(\frac{18 - 20}{3} \leq t \leq \frac{21 - 20}{3}\right)$$

$= P(-0{,}66 \leq t \leq +0{,}33)$



$= P(t \leq +0{,}33) - P(t \leq -0{,}66)$

$= P(t \leq +0{,}33) - [1 - P(t \leq 0{,}66)]$



$= P(t \leq +0{,}33) - 1 + P(t \leq 0{,}66)$

$= 0{,}6293 - 1 + 0{,}7454$

$= 0{,}3747$

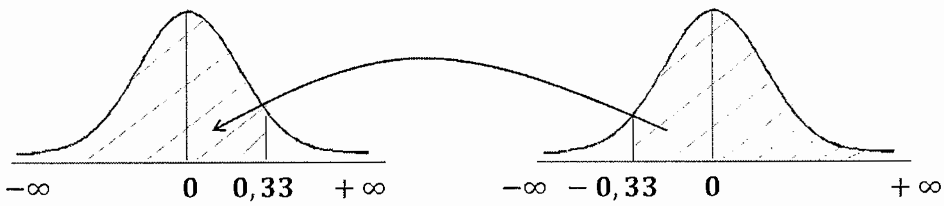
$P(18 \leq x \leq 21) = 0{,}3747$

4) $\underline{\boldsymbol{p(x \geq 19) = ?}}$

$$p(x \geq 19) = P\left(t \geq \frac{19-20}{3}\right)$$

$$= p\left(t \geq -\frac{1}{3}\right)$$

$$= p(t \geq -0{,}33)$$



$p(x \geq 19) = p(t \geq -0{,}33)$

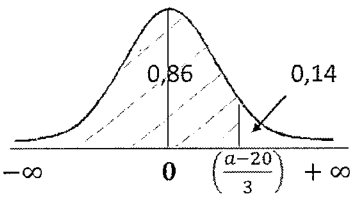
$= P(t \leq +0{,}33) = 0{,}6293$

$p(x \geq 19) = 0{,}6293$

a = ? , b = ? , c = ? –2

1) **a = ?**

$P(x \leq a) = 0{,}86$



$P\left(t \leq \dfrac{a-20}{3}\right) = 0{,}86$

$]-\infty - \dfrac{a-20}{3}]$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}14 \Rightarrow \alpha = 0{,}28$

$\alpha = 0{,}28 \Rightarrow t = +1{,}08$

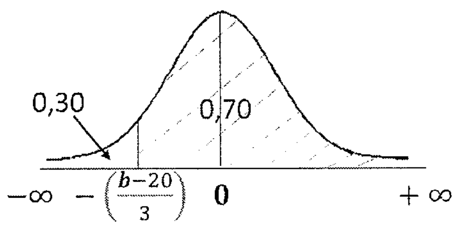
$t = +1{,}08 = \dfrac{a-20}{3}$

$\Rightarrow a = (1{,}08)3 + 20$

$\Rightarrow a = 23{,}24$

2) **b = ?**

$P(x \geq b) = 0{,}70$



$p\left(t \geq \dfrac{b-20}{3}\right) = 0{,}70$

$[\left(\dfrac{b-20}{3}\right) - +\infty[$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}30 \Rightarrow \alpha = 0{,}60 \Rightarrow t = -0{,}524$

$\Rightarrow \dfrac{b-20}{3} = -0{,}524$

$\Rightarrow b = 20 - (0{,}524)(3)$

$$\Rightarrow b = +18{,}428$$

3) **c = ?**

$$P(b \leq x \leq c) = 0{,}60$$

$$P\left(-0{,}524 \leq t\frac{c-20}{3}\right) = 0{,}60$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}10 \Rightarrow \alpha = 0{,}20$$

$$\Rightarrow t = +1{,}282 = \frac{c-20}{3}$$

$$\Rightarrow c = (1{,}282)(3) + 20$$

$$\Rightarrow c = 23{,}846$$

التمرين الثاني:

كانت علامات (300 طالب) في امتحان معين يخضع إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي (10) وانحرافه المعياري (02).

1) ما هي نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم ما بين (10) و (13)؟
2) ما هو عدد الطلبة اللذين وقعت علاماتهم ما بين (10) و (13)؟
3) ما هي أقل علامة حصل عليها طالب من بين الـ (25%) الأوائل؟

الحل:

1. نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم ما بين (10) و (13):

x : متغير عشوائي يمثل علامات الطلبة في امتحان معين.

$$x \hookrightarrow N(10{,}2)$$

$$\underline{\boldsymbol{P(10 \leq x \leq 13) = ?}}$$

$$t = \frac{x-10}{2} \Rightarrow x = 2t + 10\,;\, t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$[\left(\frac{B-10}{2}\right)- \ +\infty[$$

$$\frac{\alpha}{2}=0{,}25 \Rightarrow \alpha=0{,}50$$

$$\alpha=0{,}50 \ \Rightarrow t=0{,}674=\frac{B-10}{2}$$

$$\Rightarrow B=11{,}348$$

التمرين الثالث:

تشير الخبرة السابقة إلى أن الطلب السنوي x بالوحدات على مادة معينة متغير عشوائي يخضع إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي m وانحرافه المعياريδ.

إذا علمت أن احتمال أن يكون x محصورا ما بين $(m-3290)$ و $(m+3290)$ هو $(0{,}90)$ واحتمال أن لا يفوق x العدد (45785) هو $(0{,}08)$، فما هي قيم m وδ.

الحل:

$$x \hookrightarrow N(m,\delta)$$

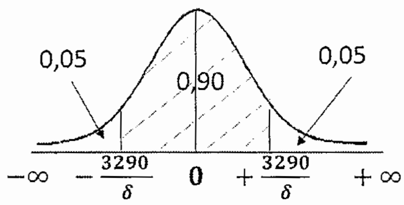
$$P(m-3290\leq x\leq m+3290)=0{,}90$$

$$P(x\leq 45785)=0{,}08$$

$$t=\frac{x-m}{\delta} \ ; \ t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} p\left(\dfrac{m-3290-m}{\delta}\leq t\leq\dfrac{m+3290-m}{\delta}\right)=0{,}90 \\ p\left(t\leq\dfrac{45785-m}{\delta}\right)=0{,}08\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} p\left(\dfrac{-3290}{\delta}\leq t\leq\dfrac{+3290}{\delta}\right)=0{,}90 \\ p\left(t\leq\dfrac{45785-m}{\delta}\right)=0{,}08\end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \; p\left(\frac{-3290}{\delta} \leq t \leq \frac{+3290}{\delta}\right) = 0{,}90$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \;\Rightarrow \alpha = 0{,}10$$

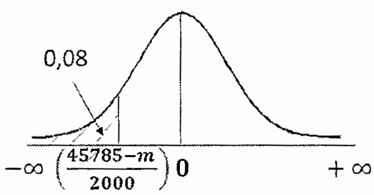
$$\alpha = 0{,}10 \;\Rightarrow\; t = 1{,}645$$

$$\begin{cases} \dfrac{3290}{\delta} = 1{,}645 \\ -\dfrac{3290}{\delta} = -1{,}645 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{3290}{1{,}645} \;\Rightarrow\; \delta = 2000$$

$$\Leftrightarrow p\left(t \leq \frac{45785-m}{\delta}\right) = 0{,}08$$

$$\Rightarrow \; p\left(t \leq \frac{45785 - m}{2000}\right) = 0{,}08$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}08 \;\Rightarrow \alpha = 0{,}16$$



$$\alpha = 0{,}16 \;\Rightarrow\; t = -1{,}405$$

$$\frac{45785 - m}{2000} = -1{,}405 \;\Rightarrow m = 48595$$

التمرين الرابع:

عند اختبار درجة الذكاء في إحدى مراكز التدريب للقنوات العسكرية الخاصة،وجد أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\bar{x} = 120$ ، و انحراف معياري $\sigma(x) = 12$، تريد هذه المؤسسة أن تعطي تدريبا متخصصا لأعلى 20% من درجات الذكاء.

المطلوب:

1- تحديد إحتمال أن يكون لشخص، اختير بطريقة عشوائية، درجة ذكاء بين 90 و 130.

2- تحديد أقل درجة يقبل صاحبها في التدريب المتخصص.

الحل:

1- حساب إحتمال أن يكون لشخص، اختير بطريقة عشوائية، درجة ذكاء بين 90 و 130:

$$x \hookrightarrow N(120,12)$$

$$\underline{\boldsymbol{P(90 \leq x \leq 130) = ?}}$$

$$t = \frac{x-120}{12} \Rightarrow x = 12t + 120\,;\, t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = p\left(\frac{90-120}{12} \leq t \leq \frac{130-120}{12}\right)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = p\left(\frac{-30}{12} \leq t \leq \frac{10}{12}\right)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = p(-2{,}50 \leq t \leq +0{,}83)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = P(t \leq +0{,}83) - P(t \leq -2{,}50)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = P(t \leq +0{,}83) - [1 - P(t \leq +2{,}50)]$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = P(t \leq +0{,}83) - 1 + P(t \leq 2{,}50)$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = 0{,}7967 - 1 + 0{,}9938$$

$$P(90 \leq x \leq 130) = 0{,}7905$$

2- <u>أقل درجة يقبل صاحبها في التدريب المتخصص:</u>

$$p(x \geq B) = 0{,}20$$

$$t = \frac{x - 120}{12} \Rightarrow x = 12t + 120\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$p(x \geq B) = 0{,}20$$

$$p\left(t \geq \frac{B - 120}{12}\right) = 0{,}20$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}20 \Rightarrow \alpha = 0{,}40$$

$$\alpha = 0{,}40 \ \Rightarrow t = 0{,}842 = \frac{B - 120}{12}$$

$$\Rightarrow B = 130{,}104$$

<u>التمرين الرابع:</u>

تتوزع علامات طلبة السنة الرابعة توزيعا طبيعيا بمتوسط 72 و تباين 81، حيث أن 10% من العلامات الجيدة يتحصل أصحابها على منحة إلى الخارج، المطلوب:

- ما هي أدنى علامة يتحصل صاحبها على منحة؟

<u>الحل:</u>

$$x \hookrightarrow N(72{,}9)$$

$$p(x \geq B) = 0{,}10$$

$$t = \frac{x - 72}{9} \Rightarrow x = 9t + 72\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$p(x \geq B) = 0{,}10$$

$$p\left(t \geq \frac{B - 72}{9}\right) = 0{,}10$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}10 \Rightarrow \alpha = 0{,}20$$

$$\alpha = 0{,}20 \ \Rightarrow t = 1{,}282 = \frac{B - 72}{9}$$

$$\Rightarrow B = 83{,}538$$

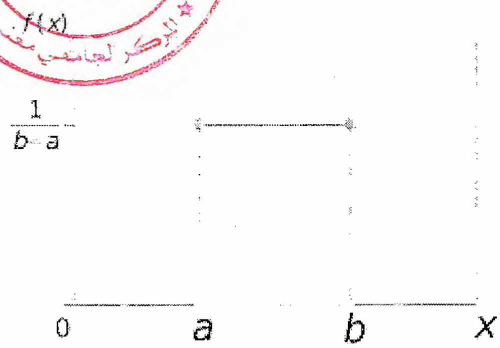
المحاضرة رقم (06): التوزيع المنتظم Uniform Distribution

تمهيد:

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم (Uniform)،مداه هو $a < x < b$ فإن دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} , \quad a < x < b$$

- ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



- ومن معالم التوزيع فإنه، توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (a وb)، ولهذا يكتب رمز هذا التوزيع بالصورة الأتية: $U(a,b) \hookleftarrow x$. ويسمى أحيانا بالتوزيع المستطيل.

1- خصائص التوزيع المنتظم:

- **الوسط الحسابي (التوقع الرياضي) $E(x)$:**

$$E(x) = \int_a^b x f(x)\, \partial x = \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) \partial x$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)[b^2 - a^2]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right)(b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2}$$

$$E(x) = \frac{b+a}{2}$$

- <u>التباين $v(x)$:</u>

يمكن حساب التباين للتوزيع المنتظم كما يلي:

$$v(x) = E(x^2) - E^2(x)$$
$$= E(x^2) - \left[\frac{b+a}{2}\right]^2$$
$$E(x^2) = \ ?$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\, \partial x$$
$$= \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) \partial x = \left(\frac{1}{b-a}\right) \left[\frac{1}{3} x^3\right]_a^b$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{b-a}\right) [b^3 - a^3]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{b-a}\right) [(b-a)(b^2 + a^2 + ab)]$$
$$E(x^2) = \left(\frac{1}{3}\right) [(b^2 + a^2 + ab)]$$
$$v(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{b^2 + a^2 + ab}{3} - \left[\frac{b+a}{2}\right]^2$$
$$= \frac{4b^2 + 4a^2 + 4ab - 3(b+a)^2}{12}$$
$$= \frac{4b^2 + 4a^2 + 4ab - 3b^2 - a^2 - ab}{12}$$
$$= \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12}$$
$$v(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2- دالة التوزيع التجميعية (C.D.F):

$$f(x) = p(X \leq x) = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx$$

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

سلسلة عمل موجهة رقم (06)

التمرين الأول:

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع التوزيع المنتظم، فأوجد الآتي:

- ❖ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟
- ❖ بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

- ❖ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

x: متغير عشوائي يمثل الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالأشهر.

أي: $12 > x > 0$، ومن تم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \qquad \text{و} \qquad 0 < x < 12$$

- ❖ حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع:

نفرض أن θ هي كمية البطاطس المستوردة، تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة اشهر من بداية البيع هي:

$$\theta x\, p(x > 7) = \theta x\big(1 - F(7)\big) = 1500\left(1 - \frac{7-0}{12-0}\right)$$

$$= 625\, Ton$$

المحاضرة رقم (07): التوزيع الأسي السالب: Negative Exponential diaribution

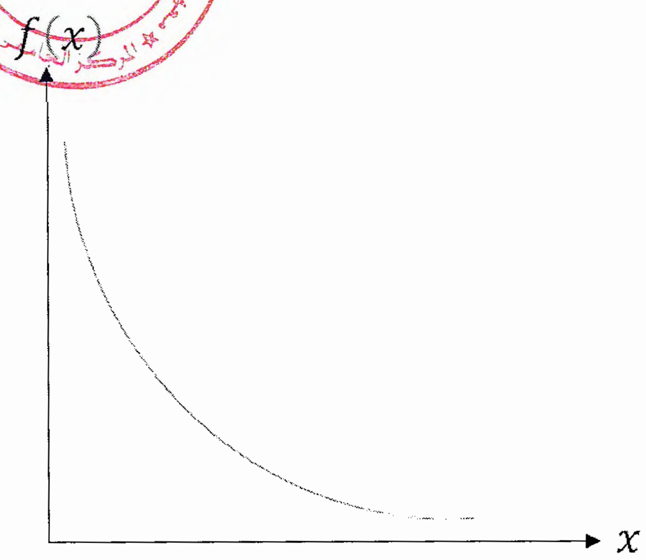
تمهيد:

إذا كان المتغير x متغيراً عشوائيا له توزيع أسي سالب، مداه هو $0 < x < +\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \qquad , \quad 0 < x < +\infty \qquad , \quad \theta > 0$$

وكما نلاحظ فإنه توجد معلمة واحدة لهذا التوزيع هي θ.

ويمكنه تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يأتي:



1- خصائص التوزيع الأسي:

- **الوسط الحسابي (التوقع الرياضي) $E(x)$:**

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x f(x)\, \partial x$$

$$= \int_0^{+\infty} x\left(\theta e^{-\theta x}\right) \partial x$$

$$= \theta \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x}\, \partial x$$

نحل هذا التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة:

نضع:

$$U = x \Rightarrow \partial U = \partial x$$

$$\partial v = e^{\theta x}\partial x \ \Rightarrow v = -\frac{1}{\theta}\ e^{-\theta x}$$

$$E(x) = \left([u.v]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\partial u\right)$$

$$= \left(\left[-\frac{1}{\theta}xe^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\,\partial x\right)$$

$$= \left(\left[-xe^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\theta x}\,\partial x\right)$$

$$= (0-0) + \left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} = \left[0 - \left(-\frac{1}{\theta}\right)\right]$$

$$E(x) = +\frac{1}{\theta}$$

- <u>التباين $v(x)$</u>:

$$v(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$= E(x^2) - \left[\frac{1}{\theta}\right]^2$$

$$E(x^2) = \ ?$$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 f\left(\theta e^{-\theta x}\right)\partial x$$

$$= \theta \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-\theta x}\, \partial x$$

يحل هذا التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة:

نضع:

$$u = x^2 \;\Rightarrow\; \partial u = 2x\partial x$$

$$\partial v = e^{-\theta x}\, \partial x \;\Rightarrow v = \; -\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}$$

$$E(x^2) = \;\theta\left[1(-\frac{1}{\theta}\; e^{-\theta x})\right]_0^{+\infty} - \theta \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\theta} 2xe^{-\theta x}\, \partial x$$

$$= \;\left[-x^2\; e^{-\theta x})\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\theta x}\, \partial x \quad , \; \int_0^{+\infty} xe^{-\theta x}\, \partial x =$$

$\frac{1}{\theta^2}$ مع:

$$= \;0 + \frac{2}{\theta^2}$$

$$E(x^2) = \frac{2}{\theta^2}$$

$$v(x) = \;\frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$v(x) = \frac{1}{\theta^2}$$

2- دالة التوزيع التجميعية ($C.D.F$):

تأخذ دالة التوزيع التجميعية $f(x)$ الشكل الآتي:

$$f(x) = \; p(x \leq x) = \int_0^{+\infty} f(x)\partial x = \left(1 - e^{-\theta x}\right)$$

سلسلة عمل موجهة رقم (07)

التمرين الأول:

إذاكانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجدما يأتي:

- ❖ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل؟
- ❖ ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة؟

الحل:

- ❖ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل:

x: متغير عشوائي يمثل الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة.

$$E(x) = 2 = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < +\infty$$

ومنه دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن تكون على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \qquad , \qquad 0 < x < +\infty$$

- ❖ حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة:

$$p(x \leq 1) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(1)} = 0{,}3935$$

المحاضرة رقم (08): توزيع الكاي تربيع.

تمهيد:

نقول عن المتغير العشوائي x يتبع توزيع كاي مربع x^2 بدرجة حرية واحدة إذا كان هذا المتغير عبارة عن جموع مربع متغيرين طبيعيين معياريين:

$$x^2 = t_1^2 + t_2^2 \Rightarrow x^2 = \left[\frac{x_1 - E(x_1)}{\delta_1}\right]^2 + \left[\frac{x_2 - E(x_2)}{\delta_2}\right]^2$$

$$t_1 \hookrightarrow N(0,1) \;, \quad t_2 \hookrightarrow N(0,1)$$

وبالتالي يمكن كتابة مايلي:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{x_i - E(x_i)}{\delta_i}\right]^2$$

ومن خلال هذه العلاقة يمكن تعميم الفكرة:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i - E(x_i)}{\delta_i}\right]^2 \hookrightarrow x^2$$

أي إذا كان x هو عبارة عن مجموع مربع n متغير طبيعي:

- **التوقع الرياضي (الأمل الرياضي):**

توقع متغير يتبع توزيع x^2 هو عبارة عن عدد من المتغيرات الطبيعية:

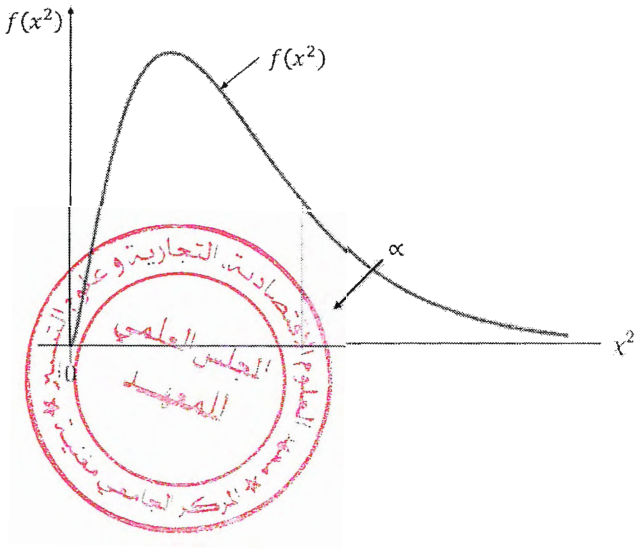
$$E(x^2) = n$$

- **التباين:**

تباين متغير يتبع توزيع هو عبارة عن ضعف المتغيرات الطبيعية

$$V(x^2) = 2n$$

العرض البياني:



$$f(x^2) = y(v)x^{\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}} e^{-\frac{x}{2}}$$

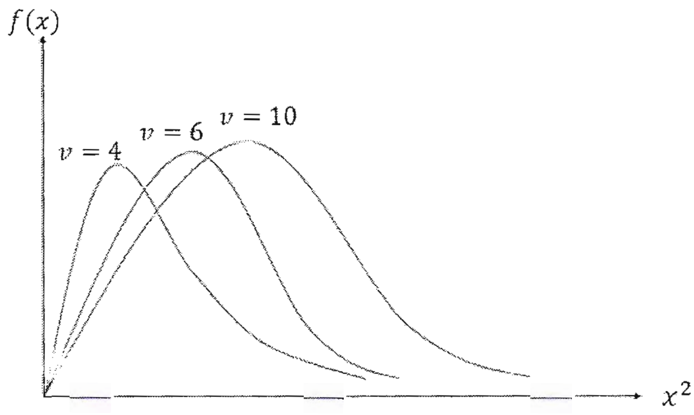
حيث:

$$\mathbf{0 \leq x \leq \infty}$$

V **: عدد درجات الحرية**

g(V) **: دالة لـ *V***

كلما ارتفع عدد درجات الحرية كلما اقترب هذا التوزيع على التوزيع الطبيعي:



- **استعمالات الكاي تربيع x^2:**

يستخدم اختبار كاي تربيع x^2 لاختبار:

- ما إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف عن التكرارات المتوقعة.
- إذا كان التوزيع الذي أخذت منه العينة ذي الحدين أو الطبيعي، أو أي توزيع آخر.
- إذا كان المتغيران مستقلين أم لا.

الإحصاءة x^2 المحسوبة من بيانات العينة المعطاة بالصيغة التالية:

$$x^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

حيث:

f_0:التكرارات المشاهدة.

f_e: التكرارات المتوقعة.

ثم نقوم باتخاذ القرار بناءاً على موقع x^2 المحسوبة في الرسم البياني لـ t_{tab}^2.

استعمال الكاي تربيع في اختبار الاستقلال: (Test of independent)

في كثير من المسائل العملية نقوم بتصنيف مجموعة من المشاهدات وفق أسلوبين، أحدهما $\boldsymbol{x}$ والثاني $\boldsymbol{y}$ في جدول اقتران مدخلاته f_0 (التكرارات المشاهدة) وأردنا الإجابة على السؤال:

هل x و y مستقلان أم لا؟ وللإجابة على هذا السؤال نقوم بحساب x_{cal}^2 ومقارنتها مع x_{tab}^2 الجدولية عند مستوي معنوية $\propto$ ودرجات الحرية:V

حيث:

$$v = (r-1)(C-1)$$

r :عدد الصفوف في جدول الاقتران.

C :عدد الأعمدة في جدول الاقتران.

- ويكون التكرار المتوقع في كل خلية من جدول الاقتران:

$$f_e = \frac{\sum r \, . \, \sum C}{N}$$

حيث:

$\sum r$: مجموع التكرارات المشاهدة للسطر.

$\sum C$: مجموع التكرارات المشاهدة للعمود.

N: حجم العينة الإجمالي.

مثال:

أراد فريق طبي أن يعرف فيما إذا كانت هناك علاقة بين نوع الدم وشدة الإصابة بالمرض. لهذا قام الفريق الطبي بدراسة (1500) حالة وصنفوها في جدول الاقتران التالي:

نوع الدم / شدة المرض	A	B	AB	O	المجموع
بسيط	543	211	90	476	1320
متوسط	44	22	08	31	105
شديد	28	09	07	31	75
المجموع	615	242	105	538	1500 / 1500

- **حساب التكرارات المتوقعة** f_e

$$f_e = \frac{\sum r \, . \, \sum C}{N}$$

$$f_e = \frac{1320 \times 615}{1500} = 541{,}2$$

نوع الدم / شدة المرض	A	B	AB	O	المجموع
بسيط	541,2	212,96	92,4	473,44	1320
متوسط	43,05	16,94	7,35	37,66	105
شديد	30,75	12,10	5,25	26,90	75
المجموع	615	242	105	538	1500 / 1500

- حساب x_{cal}^2

$$x_{cal}^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

$$= \frac{(543 - 541{,}2)^2}{541{,}2} + \frac{(211 - 212{,}96)^2}{212{,}96} + \cdots + \frac{(31 - 26{,}90)^2}{26{,}90}$$

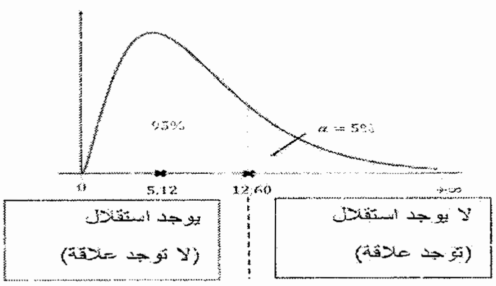
$$x_{cal}^2 = 5{,}12$$

- تحديد x_{tab}^2 الجدولية:

$$\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \alpha = 95\%$$

$$v = (r-1)(C-1) = (3-1)(4-1) = 6$$

وبالتالي: $x_{[95\%,6]}^2 = 12{,}6$



⇐ لا توجد علاقة بين نوع الدم وشدة المرض.

سلسلة عمل موجه رقم (08): توزيع x^2

التمرين (01):

جمع تاجر سيارات البيانات الموضحة في الجدول التالي عن عدد السيارات الأجنبية و المخلية التي يشتريها عملاء أعمارهم عن 30 سنة، و التي يشتريها عملاء أعمارهم سن 30 سنة فأكثر.

جدول الإقتران لمشتري السيارات:

السن	نوع السيارة		الإجمالي
	محلية	أجنبية	
تحت 30	30	40	**70**
30 فأكثر	20	80	**100**
	50	**120**	**170** / **170**

المطلوب:

هل نوع السيارة المشتراة (أجنبية أو محلية) مستقلا عن سن المشتري عند مستوى معنوية 1%.

الحل:

1- حساب التكرارات المتوقعة f_e

$$f_e = \frac{\sum r \,.\, \sum C}{N}$$

$$f_e = \frac{70 \times 50}{170} = 21$$

نوع السيارة / السن	أجنبية	محلية	المجموع
تحت 30	40	30	70
30 فأكثر	80	20	100
المجموع	120	50	170 / 170

- **حساب** x_{cal}^2

$$x_{cal}^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

$$= \frac{(30-21)^2}{21} + \frac{(20-29)^2}{29} + \frac{(40-49)^2}{49} + \frac{(80-71)^2}{71}$$

$$x_{cal}^2 = 9{,}44$$

- **تحديد** x_{tab}^2 **الجدولية:**

$$\alpha = 1\% \Rightarrow 1 - \alpha = 99\%$$

$$v = (r-1)(C-1) = (2-1)(2-1) = 1$$

وبالتالي: $x_{[99\%,1]}^2 = 6{,}63$

$x_{cal}^2 = 9{,}44 > x_{[99\%,1]}^2 = 6{,}63 \Leftarrow$ السن له علاقة في تحديد نوع السيارة.

التمرين (02):

قامت إحدى وكالات الإشهار بإجراء صبر آراء لتحديد العلاقة بين لون العلبة (التعليب) و نوعية المنتج لـ1000 مستهلك فكانت النتائج كالآتي:

النوعية / اللون	جيدة	متوسطة	ردية	المجموع
أحمر	70	200	130	400
أزرق	85	215	100	400
أصفر	45	85	70	200
المجموع	**200**	**70**	**300**	**1000 / 1000**

المطلوب:

هل توجد استقلالية بين اللون و نوعية المنتج بمستوى معنوية 5%.

الحل:

2- حساب التكرارات المتوقعة f_e

$$f_e = \frac{\sum r \,.\, \sum C}{N}$$

النوعية / اللون	جيدة	متوسطة	ردية	المجموع
أحمر	80	200	120	400
أزرق	80	200	120	400
أصفر	40	100	60	200
المجموع	200	500	300	1000 1000

- **حساب** x_{cal}^2

$$x_{cal}^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

$$= \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(200-200)^2}{200} + \frac{(130-120)^2}{120} + \frac{(85-80)^2}{80} + \frac{(215-200)^2}{200} + \frac{(100-120)^2}{120} + \frac{(45-40)^2}{40} + \frac{(85-100)^2}{100} + \frac{(70-60)^2}{60}$$

$$x_{cal}^2 = 11,3958$$

- **تحديد x_{tab}^2 الجدولية:**

$$\alpha = 5\% \Rightarrow 1-\alpha = 95\%$$

$$v = (r-1)(C-1) = (3-1)(3-1) = 4$$

وبالتالي: $x_{[95\%,4]}^2 = 9,49$

$$x_{cal}^2 = 11,3958 > x_{[95\%,4]}^2 = 9,49$$

$\Leftarrow$ لا يوجد استقلال بين لون العلبة و نوعية .

المحاضرة رقم (09): توزيع student

تعريف:

إذا كان X,Y متغيران عشوائيين، حيث أن المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي المعياري و المتغير Y يتبع توزيع كاي تربيع، فإن النسبة بين X و Y تتبع توزيع $student$:

$$student = \frac{x}{y} = \frac{normal(0,1)}{x_i^2}$$

- **المميزات العددية:**
  - **التوقع الرياضي:** $n > 1 \Rightarrow E(t) = 0$
  - **التباين:** $n > 2 \Rightarrow v(t) = \frac{n}{n-2}$

حيث: n عدد درجات الحرية.

- **خصائص توزيع $student$:**

يعتبر توزيع $student$ كحالة خاصة للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة أقل أو يساوي 30 أي في حالة العينات الصغيرة، و في هذه الحالة و للحصول على نفس نسبة التكرارات المقابلة للتوزيع الطبيعي علينا توسيع في مجال الثقة مثلا: للحصول على مجال ثقة احتماله 95%، نقوم بضرب الخطأ المعياري في القيمة 1,96 لنتأكد أن الوسط الحسابي للمجتمع يقع داخل المجال المدروس، أما إذا كان حجم العينة أقل من 30 أي $n < 30$ فعلينا استعمال مفهوم درجات الحرية، أي أن القيمة الضرورية للخطأ المعياري تتحدد وفق عدد درجات الحرية.

- **استعمال توزيع $student$:**

يستعمل توزيع $student$ في حالة عدم وجود الإنحراف المعياري للتوزيع المدروس (σ مجهولة)، حيث تحدد قيمة $student$ من الجدول الإحصائي لهذا التوزيع و ذلك حسب عدد درجات الحرية، و يمكن كتابة صيغة t بالشكل التالي: $t = \frac{\bar{x}-m}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$

حيث: $s = \hat{\sigma}$ ، $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للعينة، m الوسط الحسابي للمجتمع، n حجم العينة.

يستعمل توزيع $student$ كإختبار لمعنوية المعلمات المقدرة في حالة النماذج الإنحدارية، حيث تتم المقارنة بين القيمة المحسوبة و القيمة الجدولية، فإذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة المجدولة نقول أن للمعلمة معنوية.

- **العرض البياني:**

إن المنحنى الممثل لتوزيع $student$ هو يشبه منحنى التوزيع الطبيعي، فكلما ارتفع حجم العينة اقترب توزيع $student$ إلى التوزيع الطبيعي .

المحاضرة رقم (10): توزيع fisher

تعريف:

إذا كان x_1 و x_2 متغيران عشوائيين مستقلين، يتبع كل منهما توزيع x^2 بـ l_1 , l_2 درجة حرية على التوالي، فإن النسبة بينهما تتبع توزيع فيشر بـ l_1 , l_2 درجة حرية حيث أن دالة الكثافة تكون بالشكل التالي:

$$f(F) = k(l_1, l_2) \times F^{\frac{l_1-1}{2}} \times \left(1+\frac{l_1}{l_2}\right) - \left(\frac{l_1+l_2}{2}\right), F \geq 0$$

- **المميزات العددية لتوزيع *fisher***

- **التوقع الرياضي:** $E(F) = \frac{l_2}{l_2-2}$ $, pour\ l_2 > 2$

- **التباين:** $V(F) = \frac{2l_2^2(l_1+l_2-2)}{l_1(l_2-2)^2(l_2-4)}$ $pourl_2 > 4$

- **العرض البياني:**

إن المنحنى الممثل لتوزيع $fisher$ هو غير متناظر كما هو بالنسبة لتوزيع كاي تربيع، و هو معرف من أجل قيم غير سالبة.

- **إستعمالات توزيع *fisher*:**

يستعمل توزيع فيشر لمقارنة متوسطين حسابيين لعينتين من نفس المجتمع.

يستعمل كذلك لإختبار وجود أو عدم وجود علاقة بين متغيرين أو أكثر لنموذج خطي عام.

المحاضرة رقم (11):تقدير توزيع ذي الحدين بالتوزيع البواسوني و بالتوزيع الطبيعي.

ليكن x متغيرا عشوائيا خاضعا لتوزيع ذي الحدين معلمتاه n,p حيث n كبير.

-بالتوزيع البواسوني:

$$P(x = x_i) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(x = x_i) \approx_{n\to+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda); \lambda = np$$

- **شروط التقدير عمليا:**

- p يقترب من الصفر.
- $n \geq 10$
- **بالتوزيع الطبيعي:**

$$P(x = x_i) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(x = x_i) \approx_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\Pi}}\exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2]$$

$$t = \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \hookrightarrow N(0,1)$$

- **شروط التقدير عمليا:**

- p لا يقترب لا من الصفر و لا من الواحد.
- $n \geq 30$
- $npq \geq 3$

الإحصاء رقم (04):

محتوى المادة التعليمية:

- **المحور الأول**: نظرية العينات.
- **المحور الثاني**: نظرية التقدير.
- **المحور الثالث**: اختبار الفرضيات.

المحور الأول: المحاضرة رقم 12

نظرية العينات:

تمهيد:

نعتبر المجموعة $E = \{2,4,8,12,16\}$

نسحب من هذه المجموعة كل العينات ذات الحجم n=2 بالإرجاع و نسحب مختلف الأوساط الحسابية لهذه العينات.

عدد العينات التي يمكن سحبها هو: $5\times5\times5\times5\times5=25$

$$\begin{pmatrix} 2,2 & 2,4 & 2,8 & 2,12 & 2,16 \\ 4,2 & 4,4 & 4,8 & 4,12 & 4,16 \\ 8,2 & 8,4 & 8,8 & 8,12 & 8,16 \\ 12,2 & 12,4 & 12,8 & 12,12 & 12,16 \\ 16,2 & 16,4 & 16,8 & 16,12 & 16,16 \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب مختلف الأوساط الحسابية لهذه العينات:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 9 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن الوسط الحسابي للمجتمع E هو معلوم $8,4$ لكن الوسط الحسابي للعينات يختلف من عينة إلى أخرى لهذا فالوسط الحسابي للعينة متغير عشوائي، هدف نظري العينات هو: ايجاد التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير.

1- توزيع المعاينة للوسط الحسابي:

نعتبر مجتمعا عدد عناصره هو N، وسطه الحسابي هو m ، و انحرافه المعياري هو σ.

نسحب من هذا المجتمع عينة ذات الحجم n، $\bar{x}$ وسطها الحسابي.

يمكننا أن نبين باستعمال نظرية النهاية المركزية أن توزيع المتغير $\bar{x}$ هو طبيعي إذا كان حجم العينة $n \geq 30$.

أما إذا كان حجم العينة $n<30$ فيجب أن نفرض أن توزيع المجتمع طبيعي حتى يكون توزيع الوسط الحسابي طبيعي.

الحالة الأولى:حجم المجتمع غير محدد أو $n \leq 0,05N$.

- **السحب بالإرجاع:**

$$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- **السحب بدون إرجاع:**

$$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

الحالة الثانية:حجم المجتمع محدد و $n>0,05N$.

- **السحب بالإرجاع:**

$$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- **السحب بدون إرجاع:**

$$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}})$$

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$: يسمى بمعامل التصحيح.

مثال:

يخضع عمر نوع من البطاريات إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي 150 يوم و انحرافه المعياري 20 يوم.

- احسب احتمال أن لا يفوق متوسط أعمار العينة من 25 بطارية من هذا النوع 160 يوم.

الحل:

- **حساب احتمال أن لا يفوق متوسط أعمار العينة من 25 بطارية من هذا النوع 160 يوم.**

$\bar{x} \hookrightarrow N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(150,4)$

$\underline{\boldsymbol{P(\bar{x} \leq 160) =?}}$

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t + m \; ; \; t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\bar{x}-150}{4} \Rightarrow \bar{x} = 4t + 150 \; ; \; t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$P(\bar{x} \leq 160) = P\left(t \leq \frac{160 - 150}{4}\right)$$

$$= P(t \leq 2,5)$$

$$P(\bar{x} \leq 160) = 0,9938$$

2- توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط الحسابية:

نعتبر مجتمعين الأول عدد عناصره هو N_1، وسطه الحسابي هوm_1 ، و انحرافه المعياري هو σ_1.

نسحب منه عينة ذات الحجم n_1، وسطها الحسابي $\bar{x}_1$.و المجتمع الثاني عدد عناصره هو N_2، وسطه الحسابي هوm_2 ، و انحرافه المعياري هو σ_2.نسحب منه عينة ذات الحجم n_2، وسطها الحسابي $\bar{x}_2$.

المطلوب:

ايجاد التوزيع الإحتمالي للفروق بين الوسطين الحسابيين للعينتين: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

- $\bar{x}_1 \hookrightarrow N(m_1, \overset{*}{\sigma}_1)$

$$\overset{*}{\sigma}_1 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \\ \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\dfrac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} \end{cases}$$

- $\bar{x}_2 \hookrightarrow N(m_2, \overset{*}{\sigma}_2)$

$$\overset{*}{\sigma}_2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} \\ \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\dfrac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} \end{cases}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow \mathrm{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\left(\overset{*}{\sigma}_1\right)^2 + \left(\overset{*}{\sigma}_2\right)^2}\right)$$

مثال:

متوسط أجور عمال مؤسسة A هو 12000 بانحراف معياري قدره700 و متوسط أجور عمال مؤسسة B هو 11000 بانحراف معياري قدره 600.

المطلوب:

- أحسب إحتمال أن لا يزيد متوسط أجور عينة من 49 عامل يشتغلون في المؤسسة A عن متوسط أجور عينة من 36 عامل يشتغلون في المؤسسة B بأكثر من 900.

الحل:

$\underline{\boldsymbol{P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 900) =?}}$

$$\bar{x}_1 \hookrightarrow N\left(m_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right); \bar{x}_1 \hookrightarrow N(12000,100).$$

$$\bar{x}_2 \hookrightarrow N\left(m_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right); \bar{x}_2 \hookrightarrow N(11000,100).$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow \mathrm{N}(1000, \sqrt{(100)^2 + (100)^2})$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow \mathrm{N}(1000, 141{,}42)$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 1000}{141{,}42} \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 141{,}42t + 1000\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 900) = P\left(t \leq \frac{900 - 1000}{141{,}42}\right)$$

$$= P(t \leq -0{,}70)$$

$$= 1 - P(t \leq +0{,}70)$$

$$= 1 - 0{,}7580$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 900) = 0{,}2420$$

3- توزيع المعاينة للنسب:

نعتبر مجتمعا عدد عناصره هو N، نسبة العناصر التي تتميز بخاصية معينة هي p. نسحب من هذا المجتمع عينة ذات الحجم n، نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية هي $\hat{p}$.

النسبة $\hat{p}$ تتغير من عينة إلى أخرى لهذا فهي متغير عشوائي توزيعه الإحتمالي (إذا كان حجم العينة $n \geq 30$) كما يلي:

الحالة الأولى:حجم المجتمع غير محدد أو $n \leq 0,05N$.

- **السحب بالإرجاع:**

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

- **السحب بدون إرجاع:**

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

الحالة الثانية:حجم المجتمع محدد و $n > 0,05N$.

- **السحب بالإرجاع:**

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

- **السحب بدون إرجاع:**

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{\text{N}-\text{n}}{\text{N}-1}})$$

$\sqrt{\frac{\text{N}-\text{n}}{\text{N}-1}}$: يسمى بمعامل التصحيح.

مثال:

نسبة المنتوج الفاسد في المؤسسة هي 8%نسحب من هذا المنتوج عينة ذات الحجم n=50.

- أحسب إحتمال أن لا تفوق نسبة المنتوج الفاسد في العينة 10% .

الحل:

$\underline{\boldsymbol{P(\hat{p} \leq 0.10) = ?}}$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\mathrm{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}}) \Rightarrow \hat{p} \hookrightarrow N(0.08, \sqrt{\frac{(0.08)(0.92)}{50}})$$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(0.08, 0.038)\ ;\ t = \frac{\hat{p}-0.08}{0.038} \Rightarrow \hat{p} = 0.038t + 0.08\ ;\ t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$P(\hat{p} \leq 0.10) = P(t \leq 0.52)$$

$$= 0{,}6985$$

$$P(\hat{p} \leq 0.10) = 0{,}6985$$

4- توزيع المعاينة للفروق بين النسب:

نعتبر مجتمعين الأول عدد عناصره هو N_1 نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي p_1، نسحب من هذا المجتمع عينة ذات الحجم n_1، نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية هي $\hat{p}_1$.و المجتمع الثاني عدد عناصره هو N_2، نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي p_2، نسحب من هذا المجتمع عينة ذات الحجم n_2، نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية هي $\hat{p}_2$.

المطلوب:

ايجاد التوزيع الإحتمالي للفرق بين النسبتين للعينتين: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

- $\hat{p}_1 \hookrightarrow N(\mathrm{p}_1, \sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}})$

$$\sigma_1^* = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}} \\ \sqrt{\dfrac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}} \sqrt{\dfrac{\mathrm{N}_1 - \mathrm{n}_1}{\mathrm{N}_1 - 1}} \end{cases}$$

سلسلة عمل موجه رقم (09):

التمرين الأول:

تنتج آلة نوعا من القطع الميكانيكية، تشير الخبرة السابقة إلى أن متوسط أقطار هذه القطع هو 20 mm بانحراف معياري قدره 1 mm.

المطلوب:

1- أحسب احتمال أن لا يفوق متوسط أقطار 64 قطعة من منتوج الآلة mm21 .

2- نفرض أن قطر القطع متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي.

- أحسب احتمال أن لا يفوق متوسط أقطار 25 قطعة 20 mm و لا يقل عن *18* mm.

الحل:

$x \hookrightarrow N(20,1)$

1- $\underline{\mathbf{P(\bar{x} \leq 21) = ?}}$

$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(20, \frac{1}{\sqrt{64}})$

$\Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(20{,}0{,}125)$

$\underline{\boldsymbol{P(\bar{x} \leq 21) = ?}}$

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t + m \ ; \ t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\bar{x} - 20}{0{,}125} \Rightarrow \bar{x} = 0{,}125t + 20 \ ; \ t \hookrightarrow N(0,1)$$

$$P(\bar{x} \leq 21) = P\left(t \leq \frac{21 - 20}{0{,}125}\right)$$

$$= P(t \leq 8)$$

$P(\bar{x} \leq 21) = 0{,}99.$

2- $\underline{\boldsymbol{P(18 \leq \bar{x} \leq 20) = ?}}$

$\boldsymbol{P(18 \leq \bar{x} \leq 20)} = P(\bar{x} \leq 20) - P(\bar{x} \leq 18)$

$\bar{x} \hookrightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(20, \frac{1}{\sqrt{25}})$

$\Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(20, \frac{1}{5})$

$\Rightarrow \bar{x} \hookrightarrow N(20{,}0{,}2)$

$t = \frac{\bar{x}-20}{0{,}2} \Rightarrow \bar{x} = 0{,}2t + 20\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P(18 \leq \bar{x} \leq 20)} &= P(\bar{x} \leq 20) - P(\bar{x} \leq 18) \\
&= P\left(t \leq \frac{20-20}{0{,}2}\right) - P\left(t \leq \frac{20-18}{0{,}2}\right) \\
&= P(t \leq 0) - P(t \leq -10) \\
&= P(t \leq 0) - 1 + P(t \leq 10) \\
&= 0{,}5 - 1 + 0{,}99 \\
&= 0{,}49
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{P(18 \leq \bar{x} \leq 20)} = 0{,}49$

التمرين الثاني:

نسبة المنتوج المعاب في مصنع ما هي 5%.

إشترى شخص 500 قطعة من منتوج المصنع.

المطلوب:

1- أحسب إحتمال أن لا تقل نسبة المعاب فيما إشتراه الشخص عن 4%.

2- أحسب إحتمال أن لا تقل نسبة المعاب فيما إشتراه الشخص عن 5%.

الحل:

1– $\underline{\boldsymbol{P(\hat{p} \leq 0.04)}} = ?$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}}) \Rightarrow \hat{p} \hookrightarrow N(0.05, \sqrt{\frac{(0,05)(0.95)}{500}})$$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(0.05{,}0.0097)$$

$$t = \frac{\hat{p} - 0.05}{0.0097} \Rightarrow \hat{p} = 0.0097t + 0.05\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$P(\hat{p} \leq 0.04) = P\left(t \leq \frac{0{,}04 - 0.05}{0.0097}\right)$$

$$= P(t \leq -1{,}0259)$$

$$= 1 - P(t \leq 1{,}0259)$$

$$= 1 - 0{,}8461$$

$$P(\hat{p} \leq 0.04) = 0{,}1539$$

2– $\underline{\boldsymbol{P(\hat{p} \geq 0.05)}} = ?$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(\text{p}, \sqrt{\frac{pq}{n}}) \Rightarrow \hat{p} \hookrightarrow N(0.05, \sqrt{\frac{(0,05)(0.95)}{500}})$$

$$\hat{p} \hookrightarrow N(0.05{,}0.0097)$$

$$t = \frac{\hat{p} - 0.05}{0.0097} \Rightarrow \hat{p} = 0.0097t + 0.05\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$P(\hat{p} \geq 0.05) = P\left(t \geq \frac{0{,}05 - 0.05}{0.0097}\right)$$

$$= 0$$

$$P(\hat{p} \geq 0.05) = 0{,}5$$

التمرين الثالث:

بحوزتنا 7000مصباح أنتجها المصنعA مدة إستغلالها المتوسطة هي 2500 ساعة بإنحراف معياري قدره 500 ساعة، و 10000 مصباح أنتجها المصنع B، مدة إشتغالها المتوسطة 2300 ساعة بإنحراف معياري قدره 800 ساعة.

نختار عينة أولى بدون إرجاع ذات الحجم 400 مصباح من منتوج A و عينة ثانية ذات الحجم 200 مصباح من منتوج B.

المطلوب:

- أحسب إحتمال أن لا يزيد متوسط مدة إشتغال مصابيح العينة الأولى عن متوسط مدة إشتغال مصابيح العينة الثانية بأكثر من 100 ساعة.

الحل:

$$\underline{\boldsymbol{P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 100) = ?}}$$

$$\bar{x}_1 \hookrightarrow N\left(m_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\frac{\mathrm{N}_1 - \mathrm{n}_1}{\mathrm{N}_1 - 1}}\right);$$

$$\bar{x}_1 \hookrightarrow N\left(2500, \frac{500}{\sqrt{400}}\sqrt{\frac{7000 - 400}{7000 - 1}}\right).$$

$$\bar{x}_1 \hookrightarrow N(2500, 24{,}27).$$

$$\bar{x}_2 \hookrightarrow N\left(m_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right); \bar{x}_2 \hookrightarrow N\left(11000, \frac{800}{\sqrt{200}}\right).$$

$$\bar{x}_2 \hookrightarrow N(2300, 56{,}56)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}\right)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow N(2500 - 2300, \sqrt{(24{,}27)^2 + (56{,}56)^2})$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \hookrightarrow N(200, 61{,}557)$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 200}{61{,}557} \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 61{,}557t + 200\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 100) = P\left(t \leq \frac{100 - 200}{61{,}557}\right)$$

$$= P(t \leq -1{,}624)$$

$$= 1 - P(t \leq 1{,}624)$$

$$= 1 - 0{,}9474$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 100) = 0{,}0526$$

التمرين الرابع:

نسبة الذكور في الجامعة A هي 50% و في الجامعة B هي 45%.

المطلوب:

- أحسب إحتمال أن لا تقل نسبة الذكور في عينة من 49 شخصا من طلاب الجامعة A عن نسبة الذكور في عينة من 36 شخصا من طلاب الجامعة B بأكثر من 5%.

الحل:

- $\underline{\boldsymbol{P(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \leq 0,05)} =?}$

$$\hat{p}_1 \hookrightarrow N(\mathrm{p}_1, \sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}}) \Rightarrow \hat{p}_1 \hookrightarrow N(0{,}5, \sqrt{\frac{(0{,}5)(0{,}5)}{49}})$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1 \hookrightarrow N(0{,}5, \frac{0{,}5}{7}) \Rightarrow \hat{p}_1 \hookrightarrow N(0{,}5, 0{,}071)$$

$$\hat{p}_2 \hookrightarrow N(\mathrm{p}_2, \sqrt{\frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}}) \Rightarrow \hat{p}_2 \hookrightarrow N(0{,}45, \sqrt{\frac{(0{,}45)(0{,}55)}{36}})$$

$$\hat{p}_2 \hookrightarrow N(0{,}45{,}0{,}0829)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \hookrightarrow \mathbf{N}(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2, \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{\frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}}\right)^{\mathbf{2}}})$$

$$\Rightarrow \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hookrightarrow N(-0{,}05, 0{,}1094)$$

$$P(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \leq 0{,}05) = ?$$

$$t = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1 + 0{,}05}{0{,}1094} \Rightarrow \hat{p}_2 - \hat{p}_1 = 61{,}557t + 0{,}05\ ;\ t \hookrightarrow N(0{,}1)$$

$$P(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \leq 0{,}05) = P\left(t \leq \frac{0{,}05 + 0{,}05}{0{,}1094}\right)$$

$$= P(t \leq 0{,}91)$$

$$P(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \leq 0{,}05) = 0{,}8186$$

المحور الثاني: المحاضرة رقم 13

نظرية التقدير:

تمهيد:

يلعب الإحصاء الرياضي أو الإستنتاجي دورا مهما و في بعض الأحيان أساسيا في عملية أتخاذ القرارات حيث أنه يهتم بايجاد قيم تقديرية من العينات و الإستدلال بها لتقدير معلمات المجتمع المميزة و ذلك بشرط أن تكون هذه العينات ممثلة تمثيلا صادقا لصفات المجتمع المدروس و أن يكون حجمها كبيرا مقارنة بحجم المجتمع و لهذا فكل عملية تستعمل لحساب هذه القيم التقديرية تسمى تقديرا و كل قيمة تحسب من العينة تسمى مقدرا (الوسط الحسابي، الإنحراف المعياري،....) و كل قيمة مجهولة في المجتمع تسمى مقدرا.

1- التقدير بنقطة (التقدير النقطي):

إذا حسبت قيمة من العينة و استدل بها لتقدير المعلمة في المجتمع بقيمة واحدة فنسميه **تقديرا بنقطة**.

θ: المعلمة المراد تقديرها.

عينة إحصائية $X=(x_1,x_2,x_2,\ \ldots,x_n)=y(x)$

المقدر $\hat{\theta}=g(x_1,x_2,x_2,\ \ldots,x_n)=y(x)$

1-1- خصائص المقدر:

أ- عدم التحيز:

نقول عن المقدر $\hat{\theta}$ أنه غير متحيز إذا كان:

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

ب- التقارب:

نقول عن المقدر $\hat{\theta}$ أنه متقارب إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty} v(\hat{\theta})=0$$

- **ملاحظة**: إذا كان المقدر $\hat{\theta}$ غير متحيز و متقارب نقول أنه **صحيح مطلقا**.

جـ- الفعالية:

نقول عن المقدر $\widehat{\theta}$ أنه فعال إذا كان:

$$v(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = nE\left[(\frac{\delta lnf(x,\ \theta)}{\delta\theta})^2\right]$$

- **تقدير الإنحراف المعياري للمجتمع**:

مجتمع تباينه σ^2 المقدر s^2 صحيح مطلقا بالنسبة للتباين σ^2.

حيث: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

مثال:

مجتمع عدد عناصره 10000، m وسطه الحسابي، نسحب منه عينة حجمها 100.

- **تباين المجتمع**: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10000}(x_i - m)^2}{10000}$
- **تباين العينة**: $\grave{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i - \bar{x})^2}{100}$
- **تقدير تباين المجتمع**: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i - \bar{x})^2}{99}$

1-2- التقدير باستعمال طريق الإمكان الأكبر:

تعتبر طريق الإمكان الأكبر من أهم طرق التقدير النقطي و تعتمد على معرفة توزيع نظري معلمته مجهولة، يراد تقديرها و توجد طرق أخرى للتقدير النقطي كطريقة العزوم و طريقة المربعات الصغرى التي نستعملها بكثرة في نماذج الإنحدار.

- المعلمة المراد تقديرها:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

- كثافة التوزيع النظري:

$$f(x, \theta) = f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

- عينة إحصائية من قيم المتغير النظري:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- **لتقدير المعلمة θ بطريقة الإمكان الأكبر نتبع الخطوات التالية:**

1- نعرف دالة الإمكان الأكبر:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) =$$
$$= f(x_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \times f(x_2, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \times \dots \times f(x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

2- نحسب ln اللوغاريتم النيبيري لدالة الإمكان الأكبر.

3- نحسب المشتقات الجزئية للوغاريتم النيبيري دالة الإمكان الأكبر بالنسبة إلى: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

4- نضع هذه المشتقات الجزئية مساوية للصفر، ثم نحل النموذج المحصل عليه بالنسبة إلى المعلمات التي نريد تقديرها: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

مثال:

مدة إشتغال نوع من العناصر الإلكترونية متغير عشوائي كثافة إحتماله:

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0.\\ \theta\, e^{-\theta x} \text{ si } x\geq 0.\end{cases}$$

- قدر المعلمة بطريقة الإمكان الأكبر.

الحل:

X: مدة أشتعال العناصر.

$$f(x,\theta)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0.\\ \theta\, e^{-\theta x} \text{ si } x\geq 0.\end{cases}$$

1- $v(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) =$

$$= f(x_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \times f(x_2, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \times \dots \times f(x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

$$= e^{-\theta x_1} \times e^{-\theta x_2} \times \dots \times e^{-\theta x_n}$$

$$= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2- $$\ln(v) = \ln\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$= \ln\theta^n + \ln e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$= n \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

3- $$\frac{\delta \ln(v)}{\delta\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

4- $$\frac{\delta \ln(v)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

2- **التقدير بفترة ثقة:**

θ: المعلمة المراد تقديرها.

$$p(\theta \in [\theta_1, \theta_2]) = 1 - \alpha$$

θ_1, θ_2 قيم تحسب من العينة.

$1 - \alpha$: قياس الثقة (طول المجال).

2-1- **تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بفترة ثقة:**

نعتبر مجتمع وسطه الحسابي m و انحرافه المعياريσ، نسحب منه عينة ذات الحجم n،$\bar{x}$ وسطه الحسابي.

$$\bar{x} \hookrightarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right); T = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}, T \hookrightarrow N(0,1)$$

$$p(-t \leq T \leq +t) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-t \leq \frac{\bar{x} - \mathrm{m}}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +t\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-\sigma/\sqrt{n}\, t \leq \bar{x} - \mathrm{m} \leq +\sigma/\sqrt{n}\, t\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p\left(\bar{x} - \sigma/\sqrt{n}\, t \leq m \leq \bar{x} + \sigma/\sqrt{n}\, t\right) = 1 - \alpha}$$

- **الحالة الأولى:$n \leq 30$:**

- σ معلوم: t من جدول التوزيع الطبيعي.
- σ مجهول:تقدر بـ: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ ، t من جدول التوزيع الطبيعي.

- **الحالة الثانية:$n < 30$:**

- نفرض أن توزيع المجتمع طبيعي.
- σ معلوم: t من جدول التوزيع الطبيعي.
- σ مجهول:تقدر بـ: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ ، t من جدول توزيع student.
- درجة الحرية : $v = n - 1$

مثال(01):

تنتج مؤسسة معينة نوع من القطع الميكانيكيةطولها المتوسط هو m معيارييانحراف $\sigma = 30cm$، في عينة من 50 قطعة وجدنا $\sum_{i=1}^{n} x_i = 5500cm$

- قدر متوسط أطوال القطع m بفترة ثقة. (قياس الثقة 95%).

الحل:

$$p\left(\bar{x} - {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\, t \leq m \leq \bar{x} + {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\, t\right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{5500}{50} \Leftrightarrow \bar{x} = 110.$$

$$n = 50>30$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

$$\Rightarrow t = 1,96.$$

$$p\left(110 - {}^{30}/_{\sqrt{50}}\, 1,96 \leq m \leq 110 + {}^{30}/_{\sqrt{50}}\, 1,96\right) = 0,95$$

$$p(101{,}68 \leq m \leq 118{,}31) = 0{,}95$$

مثال(02):

متوسط مدة اشتغال مصابيح تنتجها إحدى الشركات هو m و تخضع هذه المدة إلى توزيع طبيعي.

سحبنا عينة من 25 مصباح وجدنا متوسط أستغلالها 900 ساعة و $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$ 12000.

- قدر m بفترة ثقة (95%).

الحل:

$$n = 25 < 30$$

- نفرض أن توزيع المجتمع طبيعي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i - \bar{x})^2}{99} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{12000}{24}} = \sqrt{500} \Leftrightarrow s = 22{,}36.$$

$$1 - \alpha = 0{,}05$$

$$v = n - 1 = 24$$

$$\Rightarrow t = 2{,}064$$

من جدول student.

$$p\left(\bar{x} - {}^{s}/_{\sqrt{n}}\, t \leq m \leq \bar{x} + {}^{s}/_{\sqrt{n}}\, t\right) = 1 - \alpha$$

$$p\left(900 - {}^{22{,}36}/_{\sqrt{25}}\, 2{,}064 \leq m \leq 900 + {}^{22{,}36}/_{\sqrt{25}}\, 2{,}064\right) = 0{,}95.$$

$$p(890{,}77 \leq m \leq 909{,}23) = 1 - \alpha.$$

2-2- **تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين بفترة ثقة:**

$$p\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}\,t\le m\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}\,t\right)=1-\alpha$$

- **الحالة الأول $n_1, n_2 \geq 30$:**

- σ_1, σ_2 معلومان: t من جدول التوزيع الطبيعي.
- σ_1, σ_2 مجهولان: تقدر بـ: $s_1^{\ 2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i_1}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$، $s_2^{\ 2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i_2}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}$ ، t من جدول التوزيع الطبيعي.

- **الحالة الثانية: $n_1, n_2 < 30$:**

- نفرض أن توزيع المجتمعين طبيعيان و مستقلين.
- σ_1, σ_2 معلومان: t من جدول التوزيع الطبيعي.
- σ_1, σ_2 مجهولان: تقدر بـ:

$$s_1^{\ 2}=s_2^{\ 2}=s_p^{\ 2}=\frac{(n_1-1)\grave{\sigma}_1^{\ 2}+(n_2-1)\grave{\sigma}_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$$

- t من جدول توزيع student.
- درجة الحرية: $v=n_1+n_2-2$

مثال:

كان متوسط أجور عينة من 50 عامل يشتغلون في المؤسسة A هو 13000 بانحراف معياري قدره 700 و كان متوسط أجور عينة من 40 عامل يشتغلون في المؤسسة B هو 12000 بانحراف معياري قدره 800.

المطلوب:

قدر الفرق بين متوسطي أجور العمال في المؤسستين بفترة ثقة (قياس الثقة 95%).

الحل:

$n_1, n_2 \geq 30$

نستعمل جدول student

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

$\Rightarrow t = 1{,}96.$

- σ_1, σ_2 مجهولان نقدر :

$${s_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i_1}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i_1}-\bar{x}_1)^2 = ?$$

$${\acute{\sigma}_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i_1}-\bar{x}_1)^2}{n_1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_{i_1}-\bar{x}_1)^2 = {\acute{\sigma}_1}^2 \times n_1$$

$${s_1}^2 = \frac{{\acute{\sigma}_1}^2 \times n_1}{n_1-1} = \frac{50(700)^2}{49} = 500000$$

$${s_2}^2 = \frac{{\acute{\sigma}_2}^2 \times n_2}{n_2-1} = \frac{40(800)^2}{39} = 656410{,}25$$

$$p\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2) - \sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}t \leq m \leq (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + \sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}t\right)$$
$$= 1-\alpha$$

$$p\left((13000-12000)-\sqrt{\frac{500000}{50}+\frac{656410,25}{40}}(1,96)\leq m_1-m_2\right.$$

$$\left.\leq(13000-12000)+\sqrt{\frac{500000}{50}+\frac{656410,25}{40}}(1,96)\right)$$

$$=1-\alpha$$

$$p(681,47\leq m_1-m_2\leq 1318,524)=0,95$$

2-3- تقدير النسبة في المجتمع بفترة ثقة:

نعتبر مجتمع نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة p نسحب منه عينة ذات الحجم n. $\hat{p}$ هي نسبة عناصر هذه العينة التي تتميز بالخاصية.

المطلوب:

- إيجاد فترة الثقة للنسبة p.

$$\hat{p}\hookrightarrow N(\mathrm{p},\sqrt{\frac{pq}{n}})$$

$$T=\frac{\hat{p}-\mathrm{p}}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\ ;T\hookrightarrow N(0,1)$$

$$p(-t\leq T\leq +t)=1-\alpha\Rightarrow p\left(-t\leq\frac{\hat{p}-\mathrm{p}}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\leq +t\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-\sqrt{\frac{pq}{n}}t \leq \hat{p} - \mathrm{p} \leq +\sqrt{\frac{pq}{n}}t\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow p\left(\hat{p} - \sqrt{\frac{pq}{n}}t \leq \mathrm{p} \leq \hat{p} + \sqrt{\frac{pq}{n}}t\right) = 1-\alpha$$

- نعوض p بـ$\hat{p}$ و q بـ $\hat{q}$:

المجلس العلمي للمعهد

$$p\left(\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}t \leq \mathrm{p} \leq \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}t\right) = 1-\alpha$$

مثال:

نريد تقدير نسبة العائلات التي تملك سيارة معينة بمدينة معينة فأخذنا عينة من 1000 عائلة وجدنا 400 عائلة تملك تلك السيارة.

- قدر نسبة العائلات في المدينة التي تملك تلك السيارة (بفترة ثقة 95%):

الحل:

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

$$\Rightarrow t = 1{,}96.$$

$$\hat{p} = \frac{400}{1000} \Leftrightarrow \hat{p} = 0{,}4$$

$$p\left(0{,}4 - \sqrt{\frac{(0{,}4)(0{,}6)}{1000}}(1{,}96) \leq \mathrm{p} \leq 0{,}4 + \sqrt{\frac{(0{,}4)(0{,}6)}{1000}}(1{,}96)\right) = 0{,}95$$

$$p(0{,}36 \leq \mathrm{p} \leq 0{,}44) = 0{,}95$$

2-4- تقدير الفرق بين نسبتين بفترة ثقة:

نعتبر مجتمعين، الأول نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي p_1 و الثاني p_2، نسحب من الأول عينة ذات الحجم n_1، $\hat{p}_1$ هي نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية. و نسحب من الثاني عينة ذات الحجم n_2، $\hat{p}_2$ هي نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية.

المطلوب:

- إيجاد فترة الثقة للفرق بين النسبتين: $p_1 - p_2$

$$\hat{p}_1 \hookrightarrow N(\mathrm{p}_1, \sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}})$$

$$\hat{p}_2 \hookrightarrow N(\mathrm{p}_2, \sqrt{\frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}})$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \hookrightarrow N((\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2), \sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1} + \frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}})$$

$$\mathrm{t} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)}{\sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1} + \frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}}} \hookrightarrow N(0,1)$$

$$\boldsymbol{p}\left((\hat{\boldsymbol{p}}_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2) - \sqrt{\frac{\mathbf{p}_1 \boldsymbol{q}_1}{\mathbf{n}_1} + \frac{\mathbf{p}_2 \boldsymbol{q}_2}{\mathbf{n}_2}}\, \mathbf{t} \leq \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \leq (\hat{\boldsymbol{p}}_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2) - \sqrt{\frac{\mathbf{p}_1 \boldsymbol{q}_1}{\mathbf{n}_1} + \frac{\mathbf{p}_2 \boldsymbol{q}_2}{\mathbf{n}_2}}\, \mathbf{t} \right) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}$$

مثال:

صدر إجراء جديد يتعلق بتسديد القروض. كانت نسبة المؤيدين لهذا الإجراء في عينة من 100 مواطن من حي معين هي 60%. و كانت نسبة المؤيدين لهذا الإجراء في عينة ثانية من 150 مواطن من حي آخر هي 50%.

المطلوب:

- قدر الفرق بين نسبتي مؤيدي هذا الإجراء في الحيين بفترة ثقة (قياس الثقة 95%).

الحل:

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

$$\Rightarrow t = 1{,}96.$$

$$p\left((\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}+\frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}}\,\mathrm{t} \leq \mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2 \leq (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+\sqrt{\frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{n}_1}+\frac{\mathrm{p}_2 q_2}{\mathrm{n}_2}}\,\mathrm{t}\right)=1-\alpha$$

$$p\left((0{,}6-0{,}5)-\sqrt{\frac{0{,}6\times 0{,}4}{100}+\frac{0{,}5\times 0{,}5}{150}}\,(1{,}96) \leq \mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2 \leq (0{,}6-0{,}5)+\sqrt{\frac{0{,}6\times 0{,}4}{100}+\frac{0{,}5\times 0{,}5}{150}}\,(1{,}96)\right)=0{,}95$$

$$p(0{,}0249 \leq \mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2 \leq 0{,}2249)=0{,}95$$

سلسلة عمل موجه رقم (10): نظرية التقدير.

التمرين الأول:

مدة عمر نوع من البطاريات متغير عشوائي X كثافة إحتماله:

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}; x \geq 0, a \geq 0.$$

a: معلمة نريد تقديرها.

1- أحسب $E(x)$ ، $v(x)$.

2- قدر a باستعمال طريقة الإمكان الأكبر على أساس سحب عينة عشوائية ذات الحجم n من قيم X.

3- ادرس خصائص هذا المقدر (عدم التحيز، التقارب، الفعالية).

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}; x \geq 0, a \geq 0.$$

1- **E(x) =?**

$$\mathrm{E(x)} = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\partial x.$$

$$\mathrm{E(x)} = \int_0^{+\infty} x\left(\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}\partial x.$$

$$\mathrm{E(x)} = \left(\frac{1}{a}\right)\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{a}}\partial x.$$

باستعمال التكامل بالتجزئة:

$$f = x \Rightarrow \partial f = \partial x$$

$$\partial g = e^{-\frac{x}{a}}\partial x \Rightarrow g = -ae^{-\frac{x}{a}}$$

$$E(x) = \frac{1}{a}\left[-axe^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} ae^{-\frac{x}{a}}\partial x.$$

$$E(x) = \left[-xe^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} - \left[ae^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(x) = 0 - (0 - a) = a$$

$$E(x) = a$$

<u>**-v(x) =?**</u>

$$v(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x$$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{x}{a}}\,\partial x$$

$$E(x^2) = \left(\frac{1}{a}\right)\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,\partial x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة:

$$f = x^2 \Rightarrow \partial f = 2x\partial x$$

$$\partial g = e^{-\frac{x}{a}}\partial x \Rightarrow g = -ae^{-\frac{x}{a}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,\partial x = -a\left[x^2 e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} + 2a\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{a}}\partial x$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,\partial x = -a\left[x^2 e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} + 2a^3$$

$$E(x^2) = \left(\frac{1}{a}\right)(-a\left[x^2 e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} + 2a^3)$$

$$E(x^2) = \left(\left[-x^2 e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{+\infty} + 2a^2\right)$$

$$E(x^2) = (0 - 0) + 2a^2$$

$$E(x^2) = +2a^2$$

$$v(x) = +2a^2 - a^2$$

$$v(x) = +a^2$$

2- تقدير a باستعمال طريقة الإمكان الأكبر:

$$1\text{-}v(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = f(x_1, a) \times f(x_2, a) \times \ldots \times f(x_n, a)$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x_1}{a}} \times \frac{1}{a} e^{-\frac{x_2}{a}} \times \ldots \times \frac{1}{a} e^{-\frac{x_n}{a}}$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = \left(\frac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) = \frac{1}{a^n} e^{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\mathbf{2} - \ln(v) = \ln\frac{1}{a^n} + \ln e^{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln(v) = -n\ln a - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathbf{3} - \frac{\delta \ln(v)}{\delta a} = -\frac{n}{a} + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathbf{4} - \frac{\delta \ln(v)}{\delta a} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{a} + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

3- دراسة خصائص المقدر:

- عدم التحيز:

$$\mathbf{E(\hat{a}) = a}$$

$$E(\hat{a}) = E(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}).$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n}\ E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n}[E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)].$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n}(a + a + \cdots + a).$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n} an.$$

$$E(\hat{a}) = a.$$

- التقارب:

$$\lim_{n\to+\infty} v(\hat{a}) = 0$$

$$v(\hat{a}) = v(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n})$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{n^2} v(\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{n^2} v(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{n^2}[v(x_1) + v(x_2) + \cdots + v(x_n)].$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{n^2} nv(x).$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{n} a^2$$

$$v(\hat{a}) = \frac{a^2}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v(\hat{a}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^2}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v(\hat{a}) = 0.$$

- **الفعالية:**

نقول عن المقدر $\hat{a}$ أنه فعال إذا كان:

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{I(a)}$$

$$I(a) = nE\left[\left(\frac{\delta lnf(x,\ a)}{\delta a}\right)^2\right]$$

$$lnf(x, a) = ln\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}$$

$$lnf(x, a) = -lna + lne^{-\frac{x}{a}}$$

$$lnf(x, a) = -lna + -\frac{x}{a}$$

$$\frac{\delta lnf(x,\ a)}{\delta a} = -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2}$$

$$\frac{\delta lnf(x,\ a)}{\delta a} = \frac{-a + x}{a^2}$$

$$(\frac{\delta lnf(x,\ \text{a})}{\delta \text{a}})^2 = -(\frac{-a+x}{a^2})^2$$

$$(\frac{\delta lnf(x,\ \text{a})}{\delta \text{a}})^2 = \frac{1}{a^4}(a^2 + x^2 - 2ax)$$

$$I(a) = nE\left[(\frac{\delta lnf(x,\ \text{a})}{\delta \text{a}})^2\right]$$

$$I(a) = \frac{n}{a^4}E(a^2 + x^2 - 2ax)$$

$$I(a) = \frac{n}{a^4}(a^2 + 2a^2 - 2a^2)$$

$$I(a) = \frac{n}{a^2}$$

$$I(a) = \frac{1}{v(\hat{a})}$$

$$v(\hat{a}) = \frac{1}{I(a)} = \frac{1}{\frac{n}{a^2}}$$

التمرين الثاني:

X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بوسوني معلمته λ.

1- قدر المعلمة λ بطريقة الإمكان الأكبر على أساس سحب عينة عشوائية ذات الحجم n من قيم X.

2- ادرس خصائص هذا المقدر (عدم التحيز، التقارب، الفعالية).

الحل:

1- **تقدير λ باستعمال طريقة الإمكان الأكبر:**

$$1\text{-}v(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \lambda) \times f(x_2, \lambda) \times \dots \times f(x_n, \lambda)$$

$\hat{\lambda}$ هو متقارب.

- **الفعالية:**

نقول عن المقدر $\hat{\lambda}$ أنه فعال إذا كان:

$$v(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda)}$$

$$I(\lambda) = nE\left[\left(\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda}\right)^2\right]$$

$$lnf(x,\lambda) = lne^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$lnf(x,\lambda) = -\lambda + ln\lambda^x - ln x!$$

$$lnf(x,\lambda) = -\lambda + xln\lambda - ln x!$$

$$\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda} = -1 + \frac{x}{\lambda}$$

$$\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda} = \frac{-\lambda + x}{\lambda}$$

$$\left(\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda}\right)^2 = -\left(\frac{-\lambda + x}{\lambda}\right)^2$$

$$\left(\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 + x^2 - 2\lambda x)$$

$$I(\lambda) = nE\left[\left(\frac{\delta lnf(x,\ \lambda)}{\delta\lambda}\right)^2\right]$$

$$I(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}E(\lambda^2 + x^2 - 2\lambda x)$$

$$I(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}(\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda^2)$$

$$I(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}\lambda$$

$$I(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{v(\hat{\lambda})}$$

$$v(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{1}{\frac{n}{\lambda}}$$

$\hat{\lambda}$ هو فعال.

التمرين الثالث:

قدر الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري بطريقة الإمكان الأكبر على أساس سحب عينة عشوائية ذات الحجم n من قيم المتغير العشوائي x يخضع للتوزيع الطبيعي.

الحل:

1- تقدير الوسط الحسابي (m) و الإنحراف المعياري (σ) باستعمال طريقة الإمكان الأكبر:

$$1\text{-}v(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma) = f(x_1, m, \sigma) \times f(x_2, m, \sigma) \times \dots \times f(x_n, m, \sigma)$$

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right)^2\right] \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right)^2\right] \times \dots \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n - m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\Pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$2- \ \ln(\mathrm{v}) = \ln\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\Pi}\right)^{\mathrm{n}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$\ln(\mathrm{v}) = -n ln\left(\sigma\sqrt{2\Pi}\right) + \ln\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$\ln(\mathrm{v}) = -n ln\sigma - n ln 2\Pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2$$

$$3- \begin{cases} \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\mathrm{m}} = -\dfrac{1}{2}(2)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right). \\ \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} - \dfrac{1}{2}(2)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)\frac{(-1)(x_i - m)}{\sigma^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\mathrm{m}} = \left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - m). \\ \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\sigma} = \dfrac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\sigma^3}. \end{cases}$$

$$4- \begin{cases} \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\mathrm{m}} = 0. \\ \dfrac{\delta\ln(\mathrm{v})}{\delta\sigma} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = 0. \\ \dfrac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\sigma^3} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = 0. \\ -n\sigma^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - nm = 0. \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{m}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}}{\mathbf{n}}. \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{m})^2}{\boldsymbol{n}}}. \end{cases}$$

التمرين الرابع:

خلال إحدى السنوات الدراسية جربت طريقتان في إلقاء الدروس في أحد المقاييس. بعد إجراء الإمتحان الأول أخذت عينة من 50 طالب من الدفعة التي تلقت الدروس بالطريقة الأولى فكان متوسط علاماتهم 11 بانحراف معياري قدربـ 5، و أخذت عينة من 40 طالب من الدفعة التي تلقت الدروس بالطريقة الثانية فكان متوسط علاماتهم 10 بانحراف معياري قدر بـ 4.

المطلوب:

قدر الفرق بين متوسطي علامات الدفعتين بفترة ثقة 95%.

الحل:

- **تقدير الفرق بين متوسطي علامات الدفعتين بفترة ثقة:**

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow t = 1{,}96.$$

$$p\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\, t \le m \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\, t \right) = 1 - \alpha$$

$$p\left((11-10)-\sqrt{\frac{25}{50}+\frac{16}{40}}(1{,}96)\leq m_1-m_2\right.$$

$$\left.\leq(11-10)+\sqrt{\frac{25}{50}+\frac{16}{40}}(1{,}96)\right)=0{,}95.$$

$$p\left(1-\sqrt{0{,}9}(1{,}96)\leq m_1-m_2\leq 1+\sqrt{0{,}9}(1{,}96)\right)=0{,}95.$$

$$p(-0{,}859\leq m_1-m_2\leq 2{,}859)=0{,}95.$$

المحور الثالث: محاضرة رقم 14:

اختبار الفرضيات

مقدمة:

يكتسي اختبار الفرضيات دورا أساسيا في عملية إتخاذ القرارات. الفرضية الإحصائية هي تصريح أو إدعاء قد يكون صحيحا و قد يكون كاذبا و يتعلق بمعلمة أو مجموعة من المعلمات في مجتمع واحد أو عدة مجتمعات. إن قبول الفرضية لا يعني أنها صحيحة لكن قبولها تم لعدم وجود أدلة كافية من العينات تبين أنها خاطئة و رفضها لا يعني أنها خاطئة و يعتمد إختبار الفرضيات على وضع فرضيتين:

- **الفرضية الأولى**: H_0:توضع من طرف الباحث على أمل رفضها و بهذا تسمى **الفرضية العدمية**.
- **الفرضية الثانية**: H_1:توضع على أساس أن تكون بديلا للفرضية العدمية H_0 لهذا تسمى الفرضية البديلة.

1-خطأ من النوع الأول و خطأ من النوع الثاني:

قد يختار الباحث الفرضية H_1 بينما تكون الفرضية H_0 هي الصحيحة. نسمي هذا خطأ من النوع الأول إحتمال وقوعه يرمز له بـα. و قد يختار الباحث الفرضية H_0 بينها تكون الفرضية الصحيحة هي H_1 يسمى هذا خطأ من النوع الثاني، إحتمال وقوعه يرمز له بالرمز بـβ.

2-الخطوات المتبعة لاختبار الفرضيات:

1- تحديد الفرضيات (الفرضية العدمية و الفرضية البديلة).

2- تحديد منطقتي قبول و رفض الفرضيتين.

3- حساب قيمة الإحصاءة t^* المحسوبة.

4- اتخاذ القرار: و ذلك بناء على تحديد موقع t الجدولية.

3-اختبار الوسط الحسابي للمجتمع:

- **تحديد الفرضيات:**

الحالة الأولى:

$$H_0: m = m_0$$

$$H_1: m \neq m_0$$

الحالة الثانية:

$$H_0: m = m_0$$

$$H_1: m > m_0$$

الحالة الثالثة:

$$H_0: m = m_0$$

$$H_1: m < m_0$$

- تحديد منطقتي قبول و رفض الفرضيتين (بناء على تحديد الفرضية البديلة).
- نقرأ قيمة t الموافقة لـα في الحالة الأولى من تحديد الفرضيات (جدول student أو جدول التوزيع الطبيعي المعياري)، و الموافقة لـ2α في الحالة الثانية و الثالثة.
- حساب قيمة الإحصاءة t^* المحسوبة.

$$t^* = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- اتخاذ القرار: و ذلك بناء على تحديد موقع tالجدولية.

4-اختبار نسبة في المجتمع:

- **تحديد الفرضيات:**

الحالة الأولى:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p \neq p_0$$

الحالة الثانية:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

الحالة الثالثة:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p < p_0$$

- تحديد منطقتي قبول و رفض الفرضيتين (بناء على تحديد الفرضية البديلة).
- نقرأ قيمة t الموافقة لـα في الحالة الأولى من تحديد الفرضيات، و الموافقة لـ2α في الحالة الثانية و الثالثة.
- حساب قيمة الإحصاءة t^* المحسوبة.

$$t^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

- اتخاذ القرار: و ذلك بناء على تحديد موقع tالجدولية.

سلسلة عمل موجه رقم (11):اختبار الفرضيات

التمرين الأول:

تلقت هيئة لمحاربة الغش شكاوى من المستهلكين فحواها أن متوسط أوزان صناديق الصابون الذي تبيعه إحدى الشركات أقل من 5 كغ. للتحقق من هذه الشكاوى أخذت عينة من 10 صناديق وجد فيها $\bar{x} = 4,7\ kg$ و $\sum(x_i - \bar{x})^2$ حيث x_i تشير إلى أوزان الصناديق. إذا كانت كمية المسحوق في الصناديق تتوزع طبيعيا.

المطلوب:

فهل تؤيد هذه البيانات شكاوى المستهلكين تحت مستوى معنوية 5%.

الحل:

1- **تحديد الفرضيات:**

$$H_0: m = 5$$

$$H_1: m < 5$$

2- **تحديد منطقتي القبول و الرفض:**

σ مجهول

$30 > n = 10$ من جدول $student$ نقرأ قيمة t الموافقة لـ 2α عند درجة حرية :

$$v = n - 1 = 9$$

$$t_{student} = -1,833$$

$]-\infty, -1,833]$ منطقة الرفض.

$[-1,833, +\infty[$ منطقة القبول.

3- حساب قيمة t^*:

$$t^* = \frac{\bar{x} - m_0}{s/\sqrt{n}}$$

σ مجهول نقدره بـs :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{2}{9} = 0{,}22$$

$$s = 0{,}471$$

$$t^* = \frac{4{,}7 - 5}{0{,}471/\sqrt{10}} = \frac{-0{,}3}{0{,}471/\sqrt{10}} = -2{,}01$$

4- إتخاذ القرار:

تقع t^* في منطقة الرفض و منه نقبل بالفرضية البديلة القائلة أن مسحوق التنظيف الذي تبيعه الشركة أقل من 5 كغ.

التمرين الثاني:

من المعلوم أن واحد من عشرة من المدخنين يفضلون التبغ من النوع a. قامت إحدى شركات التبغ بحملة دعائية لهذا النوع من التبغ، و للحكم على مدى نجاح هذه الحملة، أخذت عينة من 200 مدخن، وجد من بينهم 26 يفضلون هذا النوع من التبغ.

المطلوب:

هل تشكل هذه البيانات دليلا كافيا على ازدياد نسبة المدخنين الذين يفضلون النوع a تحت مستوى معنوية 5%.

الحل:

1- **تحديد الفرضيات:**

$$H_0 : p = 0,10$$

$$H_1 : p > 0,10$$

2- **تحديد منطقتي القبول و الرفض:**

منطقة الرفض تكون من جهة اليمين.

إذن نقرأ قيمة t الموافقة لـ 2α من جدول التوزيع الطبيعي:

$$t_{tab} = +1,645$$

$]-\infty, +1,645]$ منطقة القبول.

$[+1,645, +\infty[$ منطقة الرفض.

3- **حساب قيمة t^*:**

$$t^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$t^* = \frac{0,13 - 0,10}{\sqrt{\frac{(0,1)(0,9)}{200}}} = \frac{0,03}{0,0212} = +1,414$$

4- **إتخاذ القرار:**

تقع t^* في منطقة القبول إذن نقبل بـH_0 القائلة أن البيانات لا تشكل دليلا كافيا على ازدياد نسبة المدخنين.

التمرين الثالث:

يدعي أحد المسؤولين أن أكثر من 80% من المصانع في المنطقة تستوفي معايير مكافحة التلوث، لكن إحدى هيئات مكافحة التلوث لا تصدق إدعاء المسؤول، فأخذت عينة من 70 مصنعا وجدت 62 منها تستوفي معايير المكافحة.

المطلوب:

هل تؤيد بيانات العينة هذه الهيئة تحت مستوى معنوية 5%.

الحل:

1- **تحديد الفرضيات:**

$$H_0: p = 0,80$$

$$H_1: p < 0,80$$

2- **تحديد منطقتي القبول و الرفض:**

منطقة الرفض تكون من جهة اليسار.

$$n = 70 > 30$$

إذن نقرأ قيمة t الموافقة لـ 2α من جدول التوزيع الطبيعي:

$$t_{tab} = -1,645$$

$]-\infty, -1,645]$ منطقة الرفض.

$[-1,645, +\infty[$ منطقة القبول.

3- **حساب قيمة t^*:**

$$t^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$t^* = \frac{0,88 - 0,80}{\sqrt{\frac{(0,8)(0,2)}{70}}} = \frac{0,03}{0,0212} = +1,414$$

4- **إتخاذ القرار:**

تقع t^* في منطقة القبول إذن نقبل بـH_0 القائلة أن البيانات لا تؤيد اللجنة.

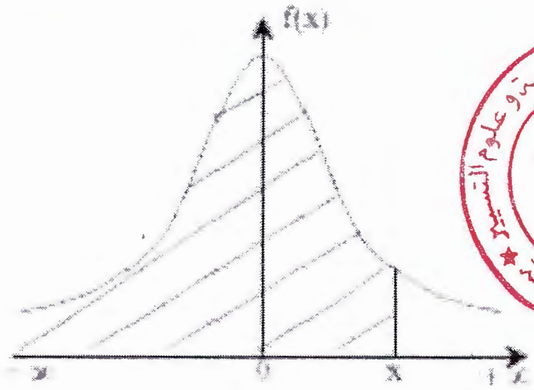
المراجع:

- جيلالي جلاطو، "نظرية الإحتمالات و التوزيعات الإحتمالية مع تمارين و مسائل محلولة"،دار هومه للطباعة و النشر و التوزيع- الجزائر 2014.
- السعدي الرجالل، "نظرية الإحتمالات –مبادئ الحساب الإحتمالي"، الجزء الأول،ديوان المطبوعات الجامعية، الساحة المركزية، بن عكنون، الجزائر،
- دومينيك سالفاتور، "نظريات ومسائل الاحصاء والاقتصاد القياسي"، ديوان المطبوعات الجامعية، 1992.
- هان بول ماندري، "الاحتمالات محاضرات وأعمال موجهة تظم تمارين محلولة"، ترجمة أبو بكر خالد سعد الله، المدرسة العليا للأساتذة القبة الجزائر.
- سيمور ليبشتز، "ملخصات شوم ومسائل الاحتمالات"، ترجمة الدكتور سامح داود، جامعة عين شمس، مصر.

الملاحق

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

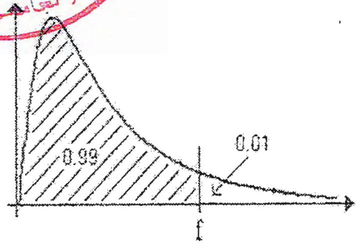
X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Table : Loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor F (ν_1 ; ν_2)
ayant la probabilité 0.01 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur



ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5980	6022	6055	6083	6106	6125	6143	6156
	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43
	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96
0	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
1	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
2	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
3	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
4	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
5	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
6	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41
7	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
8	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
9	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
0	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
1	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03
2	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
3	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93
4	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
5	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85
6	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81
7	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78
8	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
9	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
0	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
0	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52

Exemple : $\nu_1 = 5$ d.d.l. et $\nu_2 = 10$ d.d.l. $P(F_{5,10} \le f) = 0.99 \Rightarrow f = 5.64$

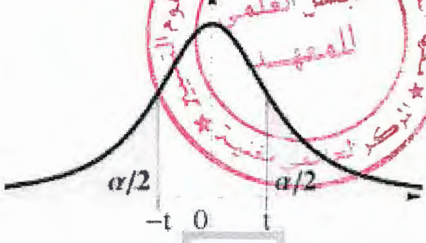
Percentage Points of the χ^2 Distribution $\chi^2_{\nu,\alpha}$

$P(\chi^2 > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$

ν	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

جدول student

	α
n ddl	... t ...



	0.9	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.1584	1.000	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	636.6
2	0.1421	0.8165	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.60
3	0.1366	0.7649	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.92
4	0.1338	0.7407	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.1322	0.7267	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.1311	0.7176	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.1303	0.7111	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.1297	0.7064	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.1293	0.7027	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.1289	0.6998	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.1286	0.6974	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.1283	0.6955	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.1281	0.6938	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.1280	0.6924	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.1278	0.6912	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.1277	0.6901	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.1276	0.6892	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.1274	0.6884	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.1274	0.6876	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.1273	0.6870	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.1272	0.6864	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.1271	0.6858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.1271	0.6853	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.1270	0.6848	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.1269	0.6844	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.1269	0.6840	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.1268	0.6837	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.1268	0.6834	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.1268	0.6830	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.1267	0.6828	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
∞	0.1257	0.6745	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291