حصة 11: أعمال موجهة حول دالتي الارتباط الذاتي

الأهداف

1- التعرف على مدى ارتباط قيم السلسلة بماضيها، وهل التأثير قصير الأجل أم طويل الأجل.

2- التمييز بين السلاسل المستقرة وغير المستقرة من خلال شكل الكوريولوغرام PACFوACF

3- وترجمتها إلى قرارات PACF وACFتدريب الطالب على قراءة مخططات عملية (استقرارية، نوع النموذج، رتبة التأخير).

تمرين 1:

س1: أي من العبارات التالية يصف بشكل أفضل وظيفة الارتباط الذاتي ACF لسلسلة زمنية؟

أ- تقيس علاقة كل قيمة حالية مع القيم السابقة لها عند أزمنة إزاحة lag مختلفة.

ب-تقيس العلاقة بين متغيرين مختلفين في نفس الزمن.

ت-تقيس علاقة كل قيمة حالية مع القيم المستقبلية فقط.

ث-تقيس فقط العلاقة بين متوسط السلسلة والانحراف المعياري.

س2: ما الفرق الأساسي بين ACF و $PACF$ في تحليل السلاسل الزمنية؟

أ- تحسب المتوسط والانحراف المعياري، بينما ACF لا تستخدمهما.

ب- لا يوجد فرق جوهري بينهما، فكلاهما يعطي نفس القيم دائماً.

ت-ACF تقيس الارتباط الكلي عند كل lag، بينما $PACF$ تقيس الارتباط الجزئي بعد استبعاد تأثير الفجوات الوسيطة.

ث- تستخدم فقط للسلاسل الموسمية و$PACF$ للسلاسل غير الموسمية.

س3: أي من الخصائص التالية تُعد مؤشرًا على أن السلسلة الزمنية غير مستقرة $Non-Stationary$؟

أ- وجود اتجاه تصاعدي أو تنازلي واضح في المتوسط مع الزمن.

ب-عدم وجود أي ارتباط ذاتي عند أي lag.

ت-القيم تتذبذب حول مستوى ثابت دون نمط واضح طويل الأمد.

ث-المتوسط ثابت تقريبًا عبر الزمن والانحراف المعياري ثابت.

التمرين 2 (حساب $\widehat{\rho}_1$ واختبار معنويته)

لدينا سلسلة زمنية y_t بطول $n = 10$ ملاحظات تمثل تشويشاً أبيضاً:

$y = \{2, -1, 0, 1, -2, 1, 0, -1, 2, -2\}$.

المطلوب:

1. حساب المتوسط $\bar{y}$.
2. حساب معامل الارتباط الذاتي التقديري $\hat{\rho}_1$ عند التأخير 1.
3. حساب حدود الثقة التقريبية عند مستوى معنوية 5%.
4. استنتاج ما إذا كان $\hat{\rho}_1$ معنوي إحصائياً أم لا، وهل يتوافق ذلك مع فرضية التشويش الأبيض.

تمرين 3:

ليكن لدينا بيانات سنوية لسلسلة زمنية للمبيعات كما يلي:

أحسب معملات الارتباط الذاتي عند درجة تأخر 3، ثم قم باختبار معنوياتها و أرسم مخطط دالتي الارتباط الذاتي

	y_t
1	205,00
2	415,00
3	189,00
4	206,00
5	211,00
6	393,00
7	213,00
8	245,00
9	222,00
10	409,00

تمرين 4:

لدينا سلسلة زمنية بطول $n = 50$ ملاحظة، يُفترض أنها تمثل تشويشاً أبيضاً. تم تقدير معاملات الارتباط الذاتي التالية:

- $\hat{\rho}_1 = 0.10$
- $\hat{\rho}_2 = -0.05$
- $\hat{\rho}_3 = 0.08$
- $\hat{\rho}_4 = -0.02$

المطلوب:

1. اختبار معنوية كل $\hat{\rho}_k$ على حدة باستخدام حدود $\pm 1.96/\sqrt{50}$.
2. حساب إحصاء Box–Pierce لغاية $h = 4$، $Q = n \sum_{k=1}^{h} \hat{\rho}_k^2$:
3. قارن قيمة Q مع القيمة الجدولية $\chi^2_{0.95}(4) \approx 9.49$، واستنتج ما إذا كانت السلسلة يمكن اعتبارها تشويشاً أبيض.

تمرين 5:

حساب معامل الارتباط عند درجة تأخير 1 واختبار معنويته

لدينا سلسلة زمنية y_t بطول (n = 12) تمثل تشويشاً أبيضاً:

y_t	3,2	-1,5	0,8	2,1	-2,3	1,4	-0,9	2,5	-1,8	0,6	1,9	-2,1

المطلوب:

1. حساب المتوسط
2. حساب معامل الارتباط الذاتي التقديري عند التأخير 1
3. حساب حدود الثقة التقريبية عند مستوى معنوية 5%
4. استنتاج ما إذا كان $\hat{\rho}_1$ معنوي إحصائياً وهل يتوافق مع فرضية التشويش الأبيض.

التمرين 6: عدة رتب واختبارBox–Pierce

لدينا سلسلة زمنية بطول (n = 60) ملاحظة، يُفترض أنها تمثل تشويشاً أبيضاً. تم تقدير معاملات الارتباط الذاتي التالية:

k	1	2	3	4	5
$\hat{\rho}_k$	0,085	-0,062	0,103	-0,031	0,048

المطلوب:

.1اختبار معنوية كل$\hat{\rho}_k$ على حدة باستخدام حدود الثقة

.2حساب إحصاء Box–Pierce لغاية(k = 5)

.3مقارنة Q مع القيمة الجدولية $\left((chi^2)_5^{0,95}\right)$ والاستنتاج.

التمرين 7: حساب ACF يدوياً لسلسلة قصيرة

لدينا سلسلة زمنية قصيرة (\x_t\) بطول:(n = 10)

x_t	4,1	-2,3	1,7	3,2	-1,9	2,4	-0,9	2,7	-2,5	1,5

المطلوب:

.1حساب المتوسط

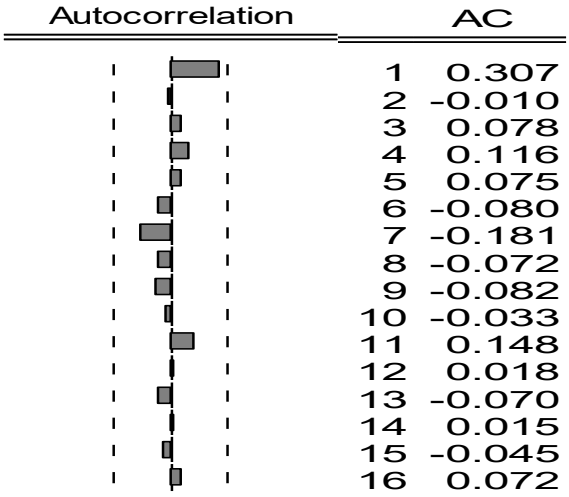
.2حساب معاملات الارتباط الذاتي عند درجة تأخير 1 و 2 .

.3باستخدام حدود الثقة، ناقش معنوية هذه المعاملات.

تمرين 8: الكوريلوغرام والتمييز بين السلاسل

لدينا كوريلوغرام ACF لسلسلة زمنية بطول (n = 32) في الشكل أدناه. حدود الثقة عند 5% هي$I_C = 0{,}346$

Sample: 1991 2022
Included observations: 32



المطلوب:

1. فسّر شكل الكوريلوغرام الموضح أعلاه
2. هل يمكن اعتبار السلسلة تشويشاً أبيضاً؟ فسر إجابتك
3. ما الدلالات العملية لهذا الشكل من الكوريلوغرام؟

التمرين 9: مقارنة ثلاث سلاسل زمنية

تم حساب الكوريلوغرام ACF لثلاث سلاسل زمنية (A, B, C) بطول (n = 80) لكل منها. حدود الثقة هي($I_C = 0{,}219$)

السلسلةA :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\rho}_k$	-0,08	0,04	-0,09	0,06	-0,05	0,15	-0,07	0,09

السلسلةB :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\rho}_k$	0,02	0,05	0,11	0,23	0,36	0,47	0,60	0,74

السلسلةC :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\rho}_k$	0,02	0,04	0,01	-0,03	0,06	0,09	0,15	0,40

المطلوب:

1. صنّف السلاسل الثلاث : أيها تشويش أبيض، وأيها لها ارتباط ذاتي قوي أو متوسط؟
2. فسّر الفرق بين أشكال الكوريلوغرام الثلاثة
3. للسلسلةB :لماذا تنخفض قيم ACF بشكل تدريجي؟ ما الذي قد يشير إليه هذا؟
4. للسلسلةC : ما الذي تُلاحظه حول سلوك ACF بعد التأخير 1؟

حل تمارين الحصة 12

تمرين 1:

ج1: تقيس علاقة كل قيمة حالية مع القيم السابقة لها عند أزمنة إزاحة lag مختلفة.

ج2:ACF تقيس الارتباط الكلي عند كل lag، بينما $PACF$ تقيس الارتباط الجزئي بعد استبعاد تأثير الفجوات الوسيطة.

ج3: وجود اتجاه تصاعدي أو تنازلي واضح في المتوسط مع الزمن

تمرين 2:

في حالة التشويش الأبيض نتوقع $\rho_k = 0$ لكل $k \geq 1$، وحدود الثقة التقريبية لمعامل الارتباط الذاتي هي $\pm 1.96/\sqrt{n}$.

صيغة معامل الارتباط الذاتي التقديري عند الرتبة k:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y}_1)(y_{t-k} - \bar{y}_2)}{\left(\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y}_1)^2}\right)(\sqrt{\sum(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2})}$$

مع $\bar{y}_1 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n} y_t \quad , \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-k}\sum_{1}^{n-k} y_{t-k}$

مجال الثقة:

$$I_C = \pm\frac{1,96}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1,96}{\sqrt{10}} = 0,62$$

y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_{t-1} - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$	$(y_t - \bar{y}_1) \times (y_{t-1} - \bar{y}_2)$
0	_	_	_	_	_	_
-1	0	-1	-0,22	1	0,0484	0,22
2	-1	2	-1,22	4	1,4884	-2,44
1	2	1	1,78	1	3,1684	1,78
-2	1	-2	0,78	4	0,6084	-1,56
1	-2	1	-2,22	1	4,9284	-2,22
0	1	0	0,78	0	0,6084	0
-1	0	-1	-0,22	1	0,0484	0,22
2	-1	2	-1,22	4	1,4884	-2,44
-2	2	-2	1,78	4	3,1684	-3,56
0	0,22			20	15,56	-10
				4,47	3,94	
						$\hat{\rho}_1 = -0{,}57$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{-1+2+1-2+1+0-1+2-2}{9} = 0$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{0-1+2+1-2+1+0-1+2}{9} = 0{,}22$$

$$\sum_{t=k+1}^{9} (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-k} - \bar{y}_2) = -10$$

$$\sum (y_t - \bar{y}_1)^2 = 20 \Rightarrow \sqrt{\sum (y_t - \bar{y}_1)^2} = 4{,}47$$

$$\sum (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2 = 15{,}56 \Rightarrow \sqrt{\sum (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2} = 3{,}94$$

$$|\hat{\rho}_1| = \frac{-10}{4{,}47 \times 3{,}94} = -0{,}57 < \mathrm{I_C} = 0{,}62$$

و بالتالي، لا يكون المعامل معنوي إحصائياً ⇒ نقبل $H_0: \rho_1 = 0$ وهو ما يتماشى مع فرضية التشويش الأبيض.

تمرين 3 :

حساب معاملات الارتباط الذاتي

	y_t	y_{t-1}
1	205,00	239,00
2	415,00	205,00
3	189,00	415,00
4	206,00	189,00
5	211,00	206,00
6	393,00	211,00
7	213,00	393,00
8	245,00	213,00
9	222,00	245,00
10	409,00	222,00
المتوسط	270,80	253,80

$y_t - \bar{y}_t$	$y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}$	$(y_t - \bar{y}_t)(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})^2$
-65,80	-14,80	973,84	4329,64	219,04
144,20	-48,80	-7036,96	20793,64	2381,44
-81,80	161,20	-13186,16	6691,24	25985,44
-64,80	-64,80	4199,04	4199,04	4199,04
-59,80	-47,80	2858,44	3576,04	2284,84
122,20	-42,80	-5230,16	14932,84	1831,84
-57,80	139,20	-8045,76	3340,84	19376,64
-25,80	-40,80	1052,64	665,64	1664,64

-48,80	-8,80	429,44	2381,44	77,44
138,20	-31,80	-4394,76	19099,24	1011,24
		-28380,40	80009,60	59031,60
			282,86	242,96
				68724,78
				$\hat{\rho}_1 =$ -0,41

	y_t	y_{t-2}
1	415,00	239,00
2	189,00	205,00
3	206,00	415,00
4	211,00	189,00
5	393,00	206,00
6	213,00	211,00
7	245,00	393,00
8	222,00	213,00
9	409,00	245,00
المتوسط	278,11	257,33

$y_t - \bar{y}_t$	$y_{t-2} - \bar{y}_{t-2}$	$(y_t - \bar{y}_t)(y_{t-2} - \bar{y}_{t-2})$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$	$(y_{t-2} - \bar{y}_{t-2})^2$
136,89	-18,33	-2509,19	18738,87	335,99
-89,11	-52,33	4663,13	7940,59	2738,43
-72,11	157,67	-11369,58	5199,85	24859,83
-67,11	-68,33	4585,63	4503,75	4668,99
114,89	-51,33	-5897,30	13199,71	2634,77
-65,11	-46,33	3016,55	4239,31	2146,47

-33,11	135,67	-4492,03	1096,27	18406,35
-56,11	-44,33	2487,36	3148,33	1965,15
130,89	-12,33	-1613,87	17132,19	152,03
		-11129,33	75198,89	133106,89
			274,22	364,84
				$\hat{\rho}_2 = -0{,}11$

		y_t	y_{t-3}
1		189,00	239,00
2		206,00	205,00
3		211,00	415,00
4		393,00	189,00
5		213,00	206,00
6		245,00	211,00
7		222,00	393,00
8		409,00	213,00
المتوسط		261,00	258,88

$y_t - \bar{y}_t$	$y_{t-3} - \bar{y}_{t-3}$	$(y_t - \bar{y}_t)(y_{t-3} - \bar{y}_{t-3})$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$	$(y_{t-3} - \bar{y}_{t-3})^2$
-261,00	-19,88	5188,68	68121,00	395,21
-72,00	-53,88	3879,36	5184,00	2903,05
-55,00	156,12	-8586,60	3025,00	24373,45
-50,00	-69,88	3494,00	2500,00	4883,21
132,00	-52,88	-6980,16	17424,00	2796,29
-48,00	-47,88	2298,24	2304,00	2292,49
-16,00	134,12	-2145,92	256,00	17988,17

2104,97	1521,00	1789,32	-45,88	-39,00
158071,88	100335,00	-1063,08		
397,58	316,76			
$\hat{\rho}_3 = -0{,}01$				

اختبار معنوية معاملات الارتباط الذاتي

$$t_c = \frac{|\hat{\rho}_k|}{\sqrt{(1-\hat{\rho}_k^2)}} \times \sqrt{n-2}$$

التأخيرات k	$\hat{\rho}_k$	n	$\lvert t_c \rvert$	ddl	$t_{n-2}^{0,05}$
1	-0,41	10	1,42	8	2,306
2	-0,11	9	0,29	7	2,365
3	-0,01	8	0,024	6	2,447

إنّ إحصائية t_c أقل من $t_{n-2}^{0,05}$ عند التأخرات الثلاثة، هذا يعني نقبل الفرضية العدمية و أنّ معاملات الارتباط الذاتي ، $\hat{\rho}_1$، $\hat{\rho}_2$، $\hat{\rho}_3$ ليس لهم تفسير معنوي و هي تساوي الصفر.

تمرين 4:

1. حدود الثقة $\pm 0.277 \approx \pm 1.96/\sqrt{50}$.

كل القيم: 0.10، 0.05، 0.08، 0.02 أصغر من 0.277 بالقيمة المطلقة ⇒ لا معنوية فردية.

2. نحسب:

$$Q = 50[(0.10)^2 + (-0.05)^2 + (0.08)^2 + (-0.02)^2] = 50[0.01 + 0.0025 + 0.0064 + 0.0004] = 50 \times 0.0193 \approx 0.965.$$

3. بما أن $0.965 < 9.49$، لا نرفض $H_0 \Leftarrow$ السلسلة يمكن اعتبارها تشويشاً أبيض عند مستوى 5%