حصة 10 أسئلة و تمارين حول السلاسل الزمنية المستقرة

الأهداف

-التعرف على خصائص السلاسل الزمنية المستقرة، وفهم بنية التشويش الأبيض وسلوكه عبر الزمن.

-توضيح خصائص السلاسل غير المستقرة من النوعين DS و TSوطرق التمييز بينهما.

- تشخيص عدم الاستقرار والتمييز بين الاتجاه المحدد والسير العشوائي باعتباره مصدرًا للعشوائية في السلسلة.

- تعميق الفهم لظاهرة الانحدار الزائف وطرق كشفها، مع التمييز بين عمليات التشويش الأبيض والعمليات المستقرة ذات الذاكرة.

تمرين 1:

س1: أي من العبارات التالية يصف بشكل أدق السلسلة الزمنية المستقرة ضعيفًا (Weakly Stationary)؟

أ- متوسطها و تباينها ثابتان مع الزمن، والتغاير بين القيم يعتمد فقط على الفاصل الزمني بينهما

ب- متوسطها يزيد أو ينقص خطيًا مع الزمن، لكن تباينها ثابت

ت-لها اتجاه (Trend) موسمي واضح لكن متوسطها الكلي ثابت على المدى الطويل

ث-تباينها يتزايد مع الزمن بينما يبقى المتوسط ثابتًا

س2: ما المقصود بالانحدار المزيف (Spurious Regression) بين سلسلتين زمنيتين غير مستقرتين من نوع $I(1)$ وغير متكاملتين مشتركًا؟

أ- انحدار يعطي معامل ارتباط ضعيف وقيم R^2 منخفضة جدًا

ب-انحدار يُظهر أن كلتا السلسلتين مستقرتان بعد أخذ الفرق الأول

ت-انحدار يبدو إحصائيًا معنويًا بمعاملات دالة و R^2 مرتفع رغم عدم وجود علاقة اقتصادية حقيقية

ث-انحدار تكون فيه الأخطاء موزعة توزيعًا طبيعيًا تمامًا

س3: أي مما يلي يُعد علامة على احتمال وجود انحدار مزيف في نموذج انحدار بين سلسلتين زمنيتين؟

أ- استقرار السلاسل في المستوى وفقًا لاختبار الجذر الواحد

ب-قيم R^2 عالية، و(t-statistic) معنوية، لكن أخطاء الانحدار غير مستقرة

ت-عدم وجود أي ارتباط ذاتي في الأخطاء

ث-قيم R^2 منخفضة، و(t-statistic) غير معنوية

س4: ما الخاصية الأساسية لسلسلة الشويش الأبيض ϵ_t في سياق السلاسل الزمنية؟

أ- أن يكون لها اتجاه خطي في المتوسط مع الزمن

ب-أن تُظهر دورات طويلة الأمد مرتبطة بالدورة الاقتصادية

ت-أن تكون القيم مستقلة وغير مترابطة ذاتيًا، بمتوسط ثابت وتباين ثابت.

التمرين 2 (استقرارية في المتوسط والتباين)

يمثّل الجدول التالي سلسلة زمنية X_t مثل مبيعات شهرية:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
X_t	10	11	9	12	10	11	9	10

المطلوب:

حساب المتوسط والتباين للسلسلة كاملة، ثم لجزئين: من 1 إلى 4، ومن 5 إلى 8.

- مناقشة هل تبدو السلسلة مستقرة في المتوسط والتباين أم لا، مع التفسير.

التمرين 3 (سير عشوائي غير مستقر)

يمثّل الجدول التالي سلسلةY_t سير عشوائي مبسط:

t	1	2	3	4	5	6
Y_t	5	7	10	9	13	15

المطلوب:

- حساب الفروق الأولى $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ للفترات 2 إلى 6.
- مقارنة سلوك Y_t وسلوك ΔY_t من حيث المتوسط والتباين.
- هل Y_t مستقرة؟ وهل ΔY_t أقرب إلى سلسلة مستقرة؟

التمرين 4 DS و TS

لدينا ثلاث سلاسل زمنية (قيم سنوية):

t	1	2	3	4	5	6
A_t	10	12	14	16	18	20
B_t	8	9	11	10	13	12
C_t	5	5	6	4	7	5

- اعتبر أن A_t تمثل اتجاهًا محددًا تقريبًا $A_t \approx 2t + 8$
- B_t تقريبًا سير عشوائي باتجاه.
- C_t سلسلة مستقرة حول متوسط ثابت.

المطلوب:

- تصنيف كل سلسلة: مستقرة، غير مستقرة من نوعDS ، أو TS اتجاه محدد.
- اقتراح تحويل لجعل A_t وB_t أكثر استقرارية (مثلا: الفرق الأول).

التمرين 5 (علاقة بين سلسلتين غير مستقرتين)

لدينا سلسلتان سنويتان:

t	1	2	3	4	5	6	7
Y_t	100	103	107	110	114	119	123
X_t	50	52	55	57	60	63	66

المطلوب:

- ملاحظة أن كلتا السلسلتين في تصاعد (غير مستقرتين تقريبًا).
- افترض أن الطالب قدّر انحدارًا بسيطًا Y_t على X_t ووجد $R^2 = 0.99$ ومعاملًا ذا معنوية عالية.

- سؤال نظري: لماذا يمكن أن يكون هذا انحدارًا زائفًا؟ وكيف يمكن اختبار الاستقرارية قبل قبول هذه العلاقة؟

التمرين 6 (مع دوربن–واتسون)

افترض أن نتائج انحدار بسيط أعطت:

- $R^2 = 0.95$
- إحصاء دوربن–واتسون$d = 0.6$

المطلوب:

- هل هذه القيم قد تشير إلى انحدار زائف؟ علّل بالاستناد إلى أن R^2 كبير جدًا وd صغير (وجود ارتباط ذاتي قوي في البواقي).
- اطلب من الطلبة اقتراح خطوات لعلاج المشكلة (اختبارات جذر وحدة، تفريق السلاسل، إعادة التقدير).

التمرين 7 (سلسلة قريبة من التشويش الأبيض)

لدينا السلسلة التالية:ε_t

t	1	2	3	4	5	6	7	8
ε_t	0.5	-0.2	0.1	-0.3	0.4	-0.1	0.0	0.2

المطلوب:

- حساب المتوسط والتباين التقريبيين.
- مناقشة هل تبدو السلسلة ذات متوسط قريب من الصفر وتباين ثابت تقريبًا؟

- بصورة نوعية، هل يمكن اعتبارها تقريبًا تشويشًا أبيض؟ ما النتيجة المتوقعة لمعاملات الارتباط الذاتي الأولى؟

التمرين 8 (بواقي نموذج)

افترض أنّ لدينا بواقي نموذج انحدار (11 مشاهدة):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e_t	0.1	0.3	0.2	0.4	0.3	-0.1	0.0	-0.2	-0.1	0.1	0.0

المطلوب:

- رسم سلسلة e_t على السبورة (أو يطلب من الطلبة رسمها).
- مناقشة بشكل نوعي: هل تبدو عشوائية حول الصفر بدون اتجاه واضح؟
- سؤال إضافي: ما الاختبارات التي يمكن استعمالها للتحقق رسميًا من أن البواقي تشويش أبيض (ذكر FAC/FAP، Box–Pierce أو Ljung–Box دون حسابات تفصيلية).

التمرين 9 (من السلسلة الخام إلى نموذج سليم)

لدينا بيانات ربع سنوية لمتغير Z_t مثلا: إنتاج:

tربع	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_t	20	23	26	29	23	26	29	32

المطلوب:

1. رسم السلسلة وملاحظة إن كان هناك اتجاه أو نمط موسمي (كل 4 أرباع تقريبًا).
2. مناقشة هل السلسلة مستقرة أم لا (وجود اتجاه صاعد وموسمية).

3. اقتراح تحويل بسيط للحصول على سلسلة أقرب للاستقرارية (مثلا: فرق أول، أو إزالة اتجاه خطي تقديري).

4. بعد التحويل، سؤال نظري: ما الذي ينبغي التحقق منه في البواقي (تشويش أبيض، عدم وجود انحدار زائف إن استُخدم نموذج انحدار، إلخ).

1. حلول تمارين السلاسل المستقرة وغير المستقرة

التمرين 1:

ج1: أ- متوسطها و تباينها ثابتان مع الزمن، والتغاير بين القيم يعتمد فقط على الفاصل الزمني بينهما.

ج2: ت-انحدار يبدو إحصائيًا معنويًا بمعاملات دالة و R^2 مرتفع رغم عدم وجود علاقة اقتصادية حقيقية.

ج3: ب- قيم R^2 عالية، و t-statistic) معنوية، لكن أخطاء الانحدار غير مستقرة

ج4: ت- أن تكون القيم مستقلة وغير مترابطة ذاتيًا، بمتوسط ثابت وتباين ثابت.

التمرين 2

السلسلة: $X_t = (10,11,9,12,10,11,9,10)$:

1. المتوسط الكلي:

$$\bar{X} = \frac{10 + 11 + 9 + 12 + 10 + 11 + 9 + 10}{8} = \frac{82}{8} = 10.25$$

التباين (تقريبي): القيم تدور حول 10–11 مع فروق صغيرة، فيكون التباين منخفضًا ومستقرًا تقريبًا.

2. الفترة 1–4:

$$\bar{X}_{1-4} = \frac{10 + 11 + 9 + 12}{4} = \frac{42}{4} = 10.5$$

الفترة 5–8:

$$\bar{X}_{5-8} = \frac{10 + 11 + 9 + 10}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

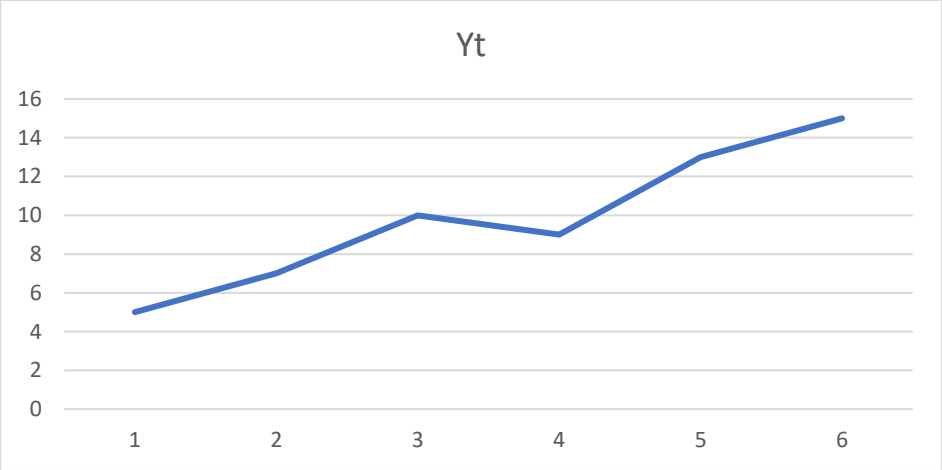
الفرق بين المتوسطين صغير (10.5 مقابل 10)، والتشتت في كل جزء قريب من الآخر، ما يشير إلى استقرار في المتوسط والتباين، أي السلسلة يمكن اعتبارها مستقرة.

التمرين 2

السلسلة: $Y_t = (5,7,10,9,13,15)$:

Y_t	ΔY_t
5	-
7	2
10	3
9	-1
13	4
15	2

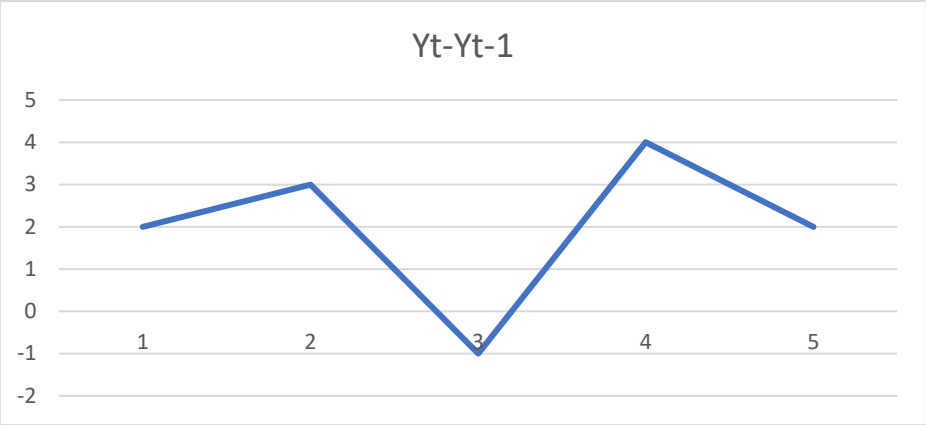
1. الفروق الأولى:



2. ملاحظة سلوك: Y_t

- تميل للارتفاع مع الزمن (اتجاه صاعد واضح)، فيُرجَّح أنها غير مستقرة.

سلوك: ΔY_t



- القيم تدور حول متوسط تقريبي (حوالي 2) مع تذبذب محدود.
- لا يوجد اتجاه واضح في الفروق، لذلك الفروق الأولى أقرب لسلسلة مستقرة.

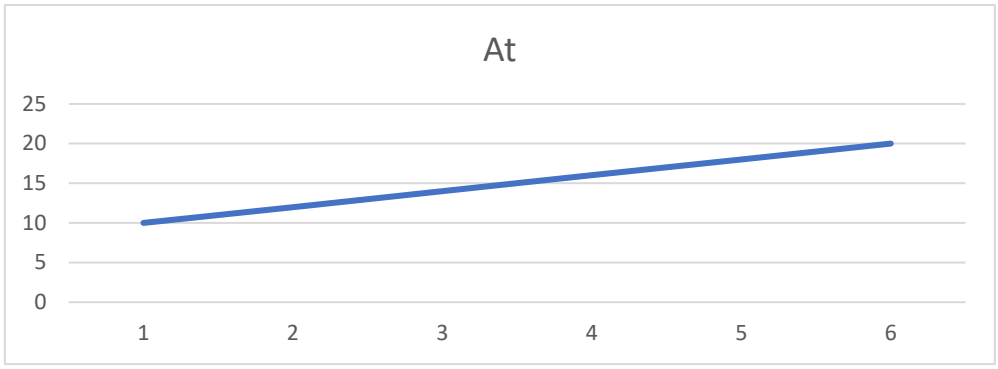
النتيجة Y_t :غير مستقرة (سير عشوائي مع اتجاه تقريبًا)، بينما ΔY_t أقرب إلى الاستقرارية.

التمرين 3

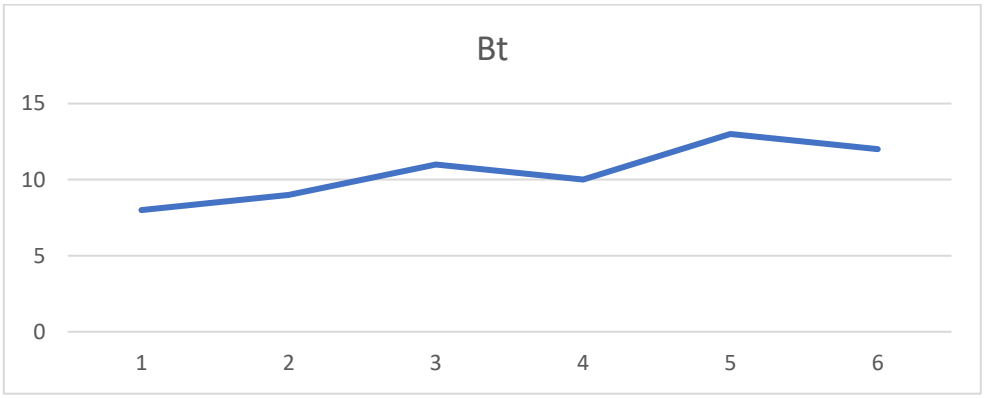
السلاسل:

A_t	B_t	C_t	ΔA_t	ΔB_t	ΔC_t
10	8	5	_	_	_
12	9	5	2	1	0
14	11	6	2	2	1
16	10	4	2	-1	-2
18	13	7	2	3	3
20	12	5	2	-1	-2

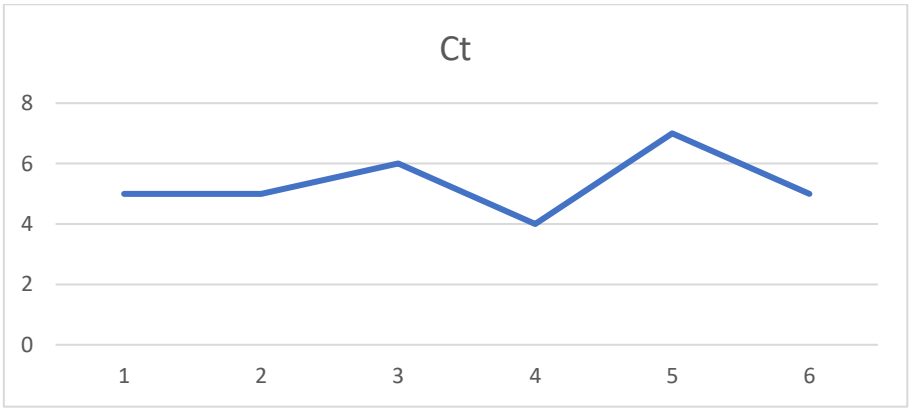
1. التصنيف:



- A_t :تزيد خطيًا تقريبًا بمعدل ثابت (كل مرة +2)، تمثل اتجاهًا محددًا (Deterministic trend)، إذًا من نوع TS غير مستقرة بسبب اتجاه محدد.



- B_t :تميل للارتفاع، لكن مع صدمات عشوائية، تشبه سيرًا عشوائيًا باتجاه، إذًا غير مستقرة من نوع DS تقريبًا (سير عشوائي باتجاه).



- C_t :تتذبذب حول متوسط ثابت (حوالي 5.3) بدون اتجاه واضح، تباين محدود، إذًا مستقرة.

2. تحويل إلى الاستقرارية:

- A_t :الفرق الأول$(2,2,2,2,2)$ $\Delta A_t = A_t - A_{t-1}$ ، وهي ثابتة تقريبًا، أي سلسلة مستقرة.
- B_t :أيضًا الفرق الأول يقلل الاتجاه العشوائي، فينتج عنه سلسلة بفروقات قريبة من التشويش حول متوسط ثابت، فتكون أقرب للاستقرار.

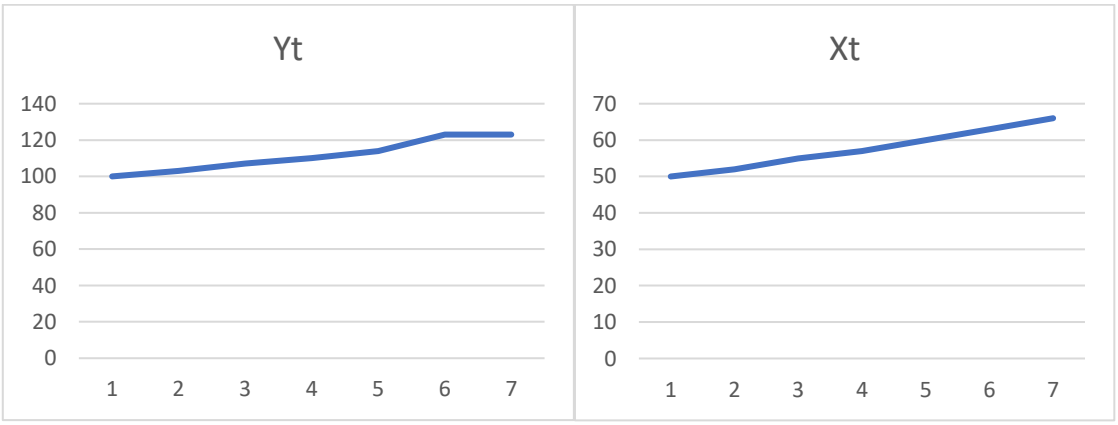
التمرين 4

السلاسل:

X_t	y_t	
50	100	2015
52	103	2016
55	107	2017
57	110	2018
60	114	2019
63	123	2020

1. الملاحظة:

كل من Y_t وX_t في اتجاه تصاعدي واضح، فهما غير مستقرتين في المتوسط (تزايد مع الزمن). هذا يوافق ما يذكره المرجع حول السير العشوائي والاتجاه وضرورة اختبار الاستقرارية قبل النمذجة.



2. الانحدار الزائف:

- عند تقدير Y_t على X_t قد نحصل على R^2 مرتفع جدًا ومعامل β_1 ذو معنوية عالية، لكن هذه العلاقة قد تعكس فقط الاتجاه المشترك (trend) وليس علاقة سببية/اقتصادية حقيقية.
- لأنهما غير مستقرتين، فمن الممكن أن ترتبطا فقط لأنهما تنموان مع الزمن (co-trending)، وهذا هو جوهر الانحدار الزائف المذكور في الملف.

3. العلاج:

- إذا كانتا غير مستقرتين، يجب التفريق أو إزالة الاتجاه، ثم إعادة تقدير الانحدار على السلاسل المستقرة.

التمرين 5

معطيات$R^2 = 0.95$:، $d = 0.6$.

- R^2 مرتفع جدًا، وd منخفض (أقرب إلى 0 منه إلى 2)، ما يدل على وجود ارتباط ذاتي قوي من الدرجة الأولى في البواقي.
- وفق معيار Granger و :Newboldإذا كان $R^2 > d$ فهذا مؤشر على انحدار زائف.

هنا$0.6 < 0.95$ ، إذًا هناك اشتباه قوي في الانحدار الزائف.

الخطوات العلاجية:

- اختبار الاستقرارية للسلاسل؛ إن كانت غير مستقرة، نأخذ الفرق الأول ثم نعيد اختبار الاستقرارية على الفرق الأول للسلسلتين.
- إعادة تقدير النموذج على السلاسل المستقرة (أو استخدام نماذج مناسبة مثل نماذج التكامل المشترك إن كانت الشروط متوفرة).

- إعادة فحص البواقي والتحقق من غياب الارتباط الذاتي.

التمرين 6

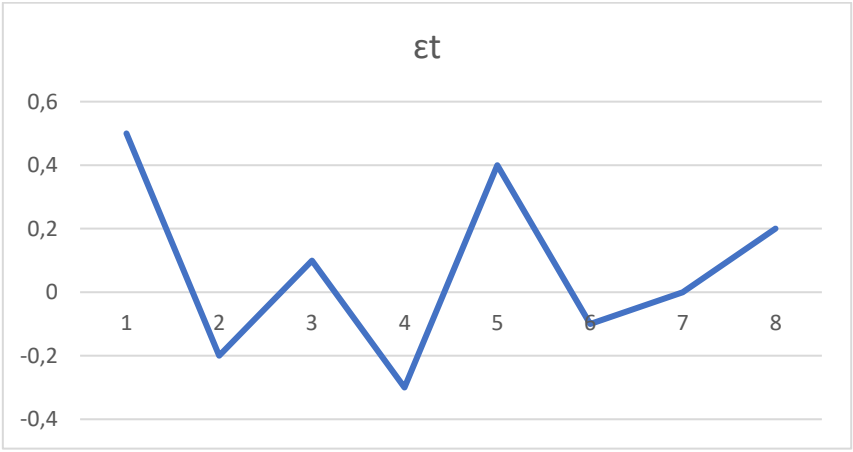
ε_t
0,5
-0,2
0,1
-0,3
0,4
-0,1
0
0,2

1. المتوسط التقريبي:

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{0.5 - 0.2 + 0.1 - 0.3 + 0.4 - 0.1 + 0 + 0.2}{8} = \frac{0.6}{8} = 0.075$$

متوسط قريب من الصفر.

2. التباين: القيم متقاربة (حوالي -0.3 إلى 0.5)، فلا تظهر زيادات في التشتت مع الزمن؛ تباين تقريبًا ثابت.



3. الارتباط الذاتي (نوعي): من خلال النظر إلى الرسم البياني للسلسلة، لا يبدو أن هناك نمطًا واضحًا (مثل زيادة ثم زيادة، أو تناقص مستمر)، بل تغيرات متناوبة؛

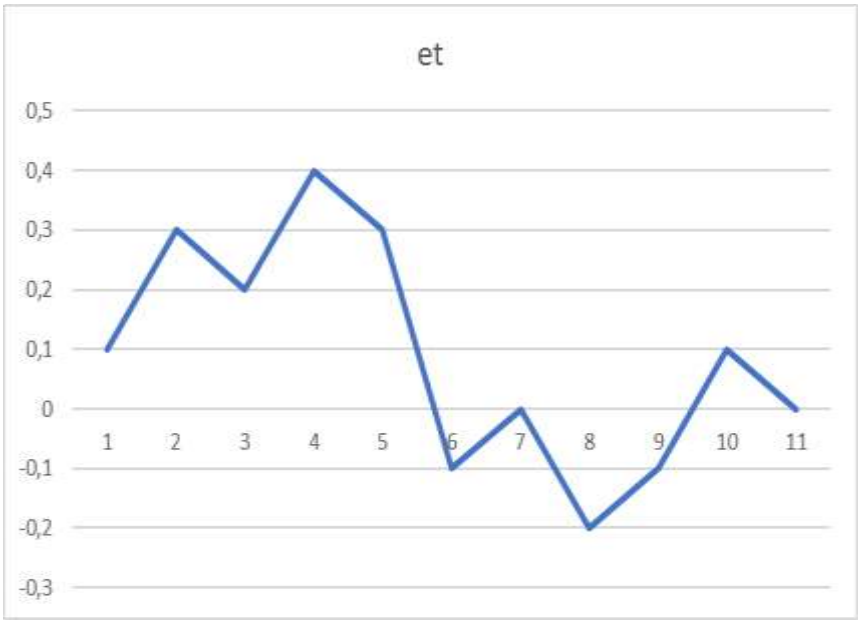
من المتوقع أن تكون معاملات الارتباط الذاتي الأولى صغيرة وقريبة من الصفر.

الاستنتاج: هذه السلسلة يمكن اعتبارها تقريبًا تشويشًا أبيض.(White Noise)

التمرين 7

1. سلسلة البواقي: بالرسم:

e_t
0,1
0,3
0,2
0,4
0,3
-0,1
0
-0,2
-0,1
0,1
0



البواقي تتذبذب حول الصفر، لا يوجد اتجاه صاعد أو نازل واضح.

- ليست هناك موسمية أو نمط دوري واضح في هذه العينة الصغيرة.

2. نوعيًا، يمكن اعتبارها قريبة من تشويش أبيض إذا لم تظهر علاقات واضحة بين القيم المتتالية.

تمرين 8

السلسلة ربع السنوية:

Z_t	ΔZ_t
20,00	-
23,00	3
26,00	3

29,00	3
23,00	-6
26,00	3
29,00	3
32,00	3



1. الوصف:

- من 20 إلى 29 ثم من 23 إلى 32: هناك اتجاه صاعد عام (كل ثلاث أو أربع فترات تقريبًا +3).
- كذلك تظهر "موجة" نمطية: 20←23←26←29 ثم 23←26←29←32؛ يمكن اعتبارها مزيجًا من اتجاه ومكوّن موسمي بسيط (كل 4 أرباع تقريبًا).

2. الاستقرارية:

- المتوسط يرتفع مع الزمن، إذًا السلسلة غير مستقرة في المتوسط.
- لا توجد دلائل قوية على تزايد التباين، لكن وجود اتجاه وحده كافٍ لاعتبارها غير مستقرة.

3. تحويل مقترح:

- الفرق الأول: ΔZ_t :

هذه الفروق تظهر نبضة -6 مرة واحدة، وبقية الفترات تغير ثابت (+3)، ما قد يتطلب معالجة إضافية (مثل إزالة اتجاه محدد خطي أولًا).

- أو يمكن تقدير اتجاه خطي $Z_t \approx a + bt$ ثم العمل على البواقي (بعد إزالة الاتجاه) للحصول على سلسلة مستقرة حول الصفر.

عند تقدير الاتجاه الخطي بطريقة المربعات الصغرى نجد:

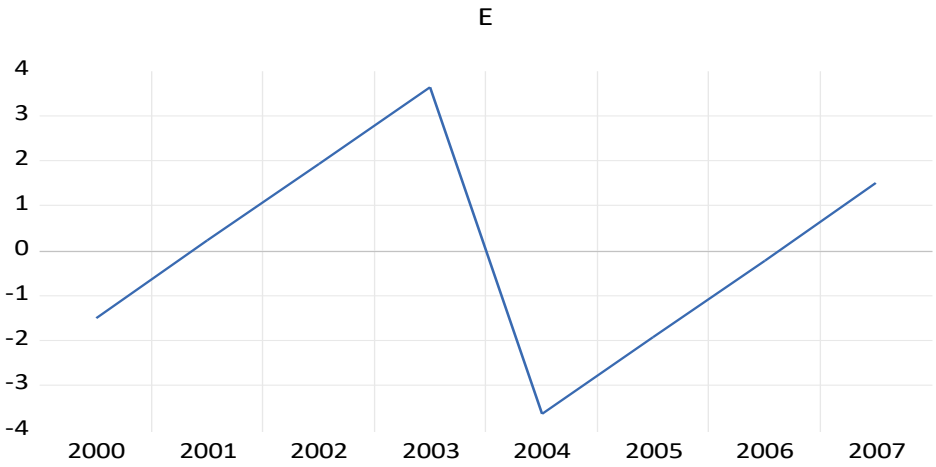
$$\hat{Z}_t = 1.28571428571 * t + 21.5$$

4. البواقي بعد النمذجة:

- بعد اختيار نموذج مناسب (مثلاً اتجاه + موسمية إن لزم).

	Z_t	t	$\hat{Z}_t$	$e_t = Z_t - \hat{Z}_t$
1,00	20,00	0,00	21,50	-1,50
2,00	23,00	1,00	22,79	0,21
3,00	26,00	2,00	24,07	1,93
4,00	29,00	3,00	25,36	3,64
5,00	23,00	4,00	26,64	-3,64
6,00	26,00	5,00	27,93	-1,93
7,00	29,00	6,00	29,21	-0,21
8,00	32,00	7,00	30,50	1,50
				$\bar{e} = 0,00$

الرسم البياني لسلسلة البواقي يبيّن أنّ



من خلال الرسم البياني لـ e_t يتبيّن أنّها تشبه التشويش الأبيض:

- متوسط قريب من 0.
- تباين ثابت.