تصحيح تمارين الحصة 3: تحديد شكل السلسلة الزمنية

حل التمرين 1

أ) اختيار الشكل لكل متجر

- المتجر (أ): التذبذب في عدد الزبائن صغير وثابت تقريباً (بين 95 و110)، أي أن حجم التغيّرات لا يتغيّر مع المستوى، لذلك الشكل المناسب هو تجميعي.Additive
- المتجر (ب): المستوى يتراوح بين 100 و1000 ومعه تكبر التذبذبات كلما ارتفع المتوسط، أي أن التقلّبات تتناسب مع مستوى السلسلة، لذلك الشكل المناسب هو جدائي.Multiplicative

ب) تأثير اختيار الشكل على التفكيك والموسمية

- في الشكل التجميعي تُكتب السلسلة عادة بصيغة $Y_t = T_t + S_t + E_t$، أي يتم حساب الموسمية كفروق مطلقة بين القيم الفعلية وقيم الاتجاه.
- في الشكل الجدائي تُكتب السلسلة بصيغة $Y_t = T_t \times S_t \times E_t$، وتُستخرج الموسمية على شكل معاملات أو نسب مئوية (مؤشرات موسمية).

حل تمرين 2

ج1: مكوّنات السلسلة الزمنية

- الاتجاه: T_t Trend الحركة العامة طويلة الأجل (صعود أو هبوط) عبر الزمن.
- الموسمية: S_t Seasonality نمط يتكرر بانتظام في فترات ثابتة مثل الأشهر أو الفصول في السنة.
- الدورية: C_t Cyclical تقلبات طويلة الأجل غير منتظمة تماماً في طول دورتها، غالباً مرتبطة بدورات اقتصادية.
- العشوائية أو الباقي: E_t Irregular/Random التغيّرات العشوائية غير المنتظمة التي لا تفسَّر بالاتجاه أو الموسمية أو الدورية.

ج2: التمييز بين الموسمية والدورية عملياً

- الموسمية لها دورة ثابتة معروفة (مثلاً كل 4 فصول أو 12 شهراً) وتعود بنفس التوقيت كل سنة.
- الدورية أطول وغير منتظمة؛ طول الدورة وشدّتها يتغيّران ولا ترتبط مباشرة بتقويم ثابت بل غالباً بدورات اقتصادية أو تجارية.

حل تمرين 3

ج1: المقصود بالشكل التجميعي

- الشكل التجميعي يعني تمثيل السلسلة كمجموع لمكوّناته:

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

- يُستخدم عندما تكون التقلّبات الموسمية تقريباً ثابتة في قيمتها المطلقة ولا تزداد مع ارتفاع مستوى السلسلة.

ج2: المقصود بالشكل الجدائي ومتى يُفضَّل

- الشكل الجدائي يمثّل السلسلة كحاصل ضرب للمكوّنات:

$$Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times E_t$$

- يُفضَّل استخدامه عندما يكون حجم التذبذب الموسمي متناسباً مع مستوى السلسلة؛ أي أن الفروق تعبَّر عادة كنِسَب أو مؤشرات (مثلاً 1.20 يعني 20٪ فوق الاتجاه).

ج3: كيفية اختيار الشكل المناسب عملياً

- يُرسم السلسلة أو تُقارن الفروق بين القيم والاتجاه: إذا كانت الفروق تقريباً ثابتة ← نموذج تجميعي، وإذا زادت الفروق مع ارتفاع المستوى ← نموذج جدائي.
- يمكن أيضاً فحص البواقي بعد نمذجة الاتجاه: إذا كان تباين البواقي يزداد مع المستوى فهذا دليل على ملاءمة النموذج الجدائي أكثر.

ج4: النموذج المتوافق مع الطبيعة التجميعية (اختيار من الصيغ الأربع)

- النموذج التجميعي القياسي هو $Y_t = T_t + S_t + E_t$، لذلك الجواب الصحيح هو الصيغة رقم 1 من القائمة.

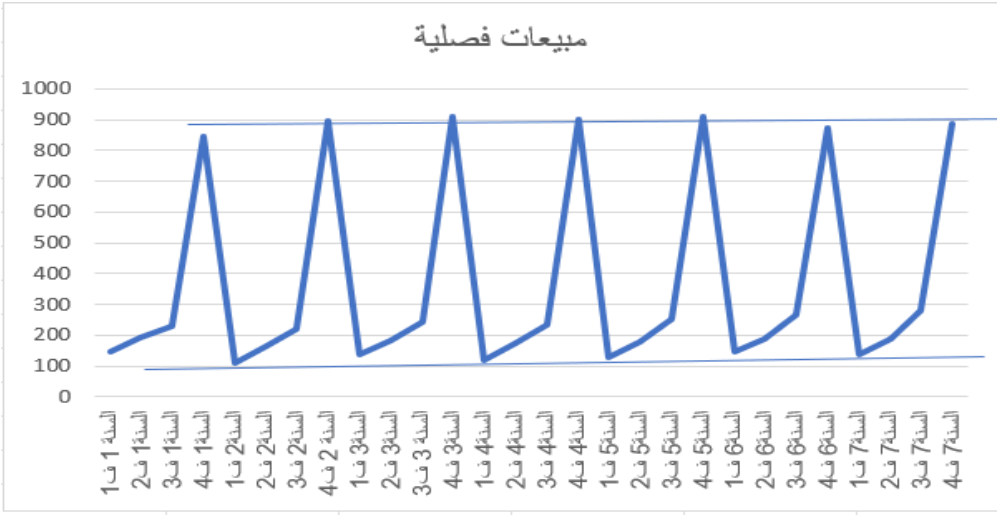
ج5: الحالة التي تشير إلى تفضيل نموذج تجميعي

- في النموذج التجميعي تبقى القمم والقيعان الموسمية تقريباً بنفس الارتفاع بالرغم من اتجاه صعودي أو هبوطي في المستوى العام.
- لذلك العبارة الصحيحة هي .1تظل القمم الموسمية تحتفظ بارتفاع مشابه على مر السنين على الرغم من الاتجاه الصعودي الطفيف.

حل تمرين 4 (الجدول الفصلي لسبع سنوات)

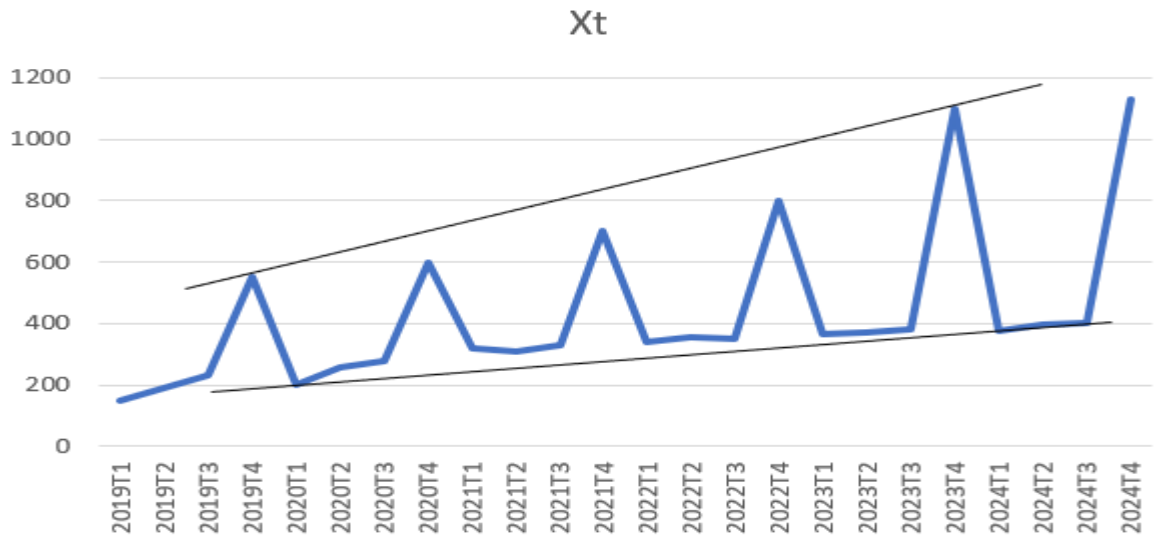
من الجدول:

- المبيعات في الفصول 1-3 ترتفع تدريجياً عبر السنوات لكن الفروق بين الفصول داخل نفس السنة ليست ضخمة، بينما ترتفع في الفصل 4من كل سنة بشكل كبير جداً.
- هذا يشير إلى وجود عنصر موسمي في الفصل 4 كما هو مبيّن في الرسم البياني لسلسلة المبيعات الذي يقع بين خطين متوازيين أي أن السلسلة تبدو أنّها تجميعية بحتة وليست جدائية بحتة.



حل تمرين 5: تحديد طبيعة السلسلة الزمنية في الجدول أ

أولا نقوم بتمثيل السلسلة الزمنية برسم بياني على محور متعامد ومتجانس كما هو مبيّن كالتالي:



نلاحظ من خلال الرسم البياني للسلسلة الزمنية خلال الفترة (2019-2024) يقع بين خطين غير متوازيين هذا يعني أنه من المحتمل أن تكون الصيغة الرياضية للسلسلة الزمنية جدائية.

للتأكّد من ذلك نقوم بتقدير الانحدار البسيط للانحراف المعياري بدلالة الوسط الحسابي للسلسلة باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية.

$$\hat{\delta}_t = \hat{a}\bar{x}_t + \hat{b}$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_1^9(\delta_t - \bar{\delta}) * (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}})}{\sum_1^9(\bar{x}_t - \bar{\bar{x}})^2}$$

أولا يتم حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل سنة بالعلاقتين التاليتين على الترتيب:

$$\bar{x}_t = \frac{\sum_{j=1}^{p=4} x_j}{p} \quad , \quad \delta_t = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{p=4} (x_j - \bar{x})^2}{p-1}}$$

النتائج موضحة في الجدول التالي:

$\delta_t = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{p=4} (x_j - \bar{x})^2}{p-1}}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{p=4} x_j}{p}$
183,09	280,00
180,62	333,75
190,51	414,50
225,92	461,25
364,22	553,75
370,16	575,00
$\bar{\delta} = 252,42$	$\bar{\bar{x}} = 436,38$

$\delta_t - \bar{\delta}$	$\bar{x} - \bar{\bar{x}}$	$(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2$	$(\delta_t - \bar{\delta}) \times (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$	$\hat{\delta}_t = 0,7\bar{x} - 53,02$
-69,33	-156,38	24454,70	10841,83	142,98
-71,80	-102,63	10532,92	7368,83	180,605
-61,91	-21,88	478,73	1354,59	237,13
-26,50	24,87	618,52	-659,06	269,855
111,80	117,37	13775,72	13121,97	334,605
117,74	138,62	19215,50	16321,12	349,48

$$\sum_1^6 (\delta_t - \bar{\delta}) * (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}) = 48349,28$$

$$\sum_1^6 (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}})^2 = 69076,09$$

$$\hat{a} = \frac{48349,28}{69076,09} = 0,70\ , \qquad \hat{b} = 436,38 - (0,7 \times 252,42) = -53,02$$

$$\hat{\delta}_t = 0,7\bar{x} - 53,02$$

$\hat{\delta}_t = 0,7\bar{x} - 53,02$	$\hat{e}_t = \delta_t - \hat{\delta}_t$	$\hat{e}^2$
142,98	40,11	1608,81
180,605	0,02	0,00
237,13	-46,62	2173,42
269,855	-43,94	1930,28
334,605	29,62	877,05
349,48	20,68	427,66

$$\sum_{1}^{9} \hat{e}^2{}_i = 7017,23$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = 1754,31$$

$$\sigma_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}_t)^2} = \frac{1754,31}{69076,09} = 0,03$$

$\sigma_{\hat{a}_1} = 0,17$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1|}{\sigma_a} = \frac{0,7}{0,17} = 4,12$$

قراءة t ستودنت من الجدول

اتخاذ القرار:

$t_4^{0,05} = 2,776 < t_c = 4,12$

بما أنّ $t^* = 4,12$ ستودنت الحسابية أكبر من $t_4^{0.05} = 2,776$ ، فإنّ شكل السلسلة الزمنية جدائي.

الجدول ج:

	2015	2016	2017	2018
1	72	91	77	84
2	76	73	67	68
3	56	76	73	97
4	80	86	77	78
5	69	62	75	67
6	71	95	85	86
7	57	76	88	94
8	75	87	76	71
9	95	85	88	78
10	70	73	75	77
11	65	60	63	66
12	55	58	50	57

$\delta_t = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{p=4}(x_j - \bar{x})^2}{p-1}}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{p=4} x_j}{p}$	$\delta_t - \bar{\delta}$	$\bar{x} - \bar{\bar{x}}$
70,08	11,31	-4,50	-0,28
76,83	12,33	2,25	0,74
74,50	10,79	-0,08	-0,80
76,92	11,90	2,34	0,31
$\bar{\delta} = 74{,}58$	$\bar{\bar{x}} = 11{,}59$		

$(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2$	$(\delta_t - \bar{\delta}) \times (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$	$\hat{\delta}_t = 2{,}73\bar{x} + 42{,}94$	$\hat{e}_t = \delta_t - \hat{\delta}_t$	$\hat{e}^2$
0,08	1,26	73,81	-3,73	13,92
0,55	1,68	76,61	0,22	0,05
0,64	0,06	72,40	2,10	4,41
0,10	0,74	75,44	1,48	2,18

$$\sum_1^4 (\delta_t - \bar{\delta}) * (\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}) = 3{,}74$$

$$\sum_{1}^{4}(\bar{\mathrm{x}}_t - \bar{\bar{\mathrm{x}}})^2 = 1{,}37$$

$$\hat{\mathrm{a}} = \frac{3{,}74}{1{,}37} = 2{,}73\,, \qquad \hat{b} = 74{,}58 - (2{,}73 \times 11{,}59) = 42{,}94$$

$$\hat{\delta}_t = 2{,}73\bar{x} + 42{,}94$$

$$\sum_{1}^{9}\hat{e}^2{}_i = 20{,}56$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = 10{,}28$$

$$\sigma_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}_t)^2} = \frac{10{,}28}{1{,}37} = 7{,}5$$

$$\sigma_{\hat{a}_1} = 2{,}74$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1|}{\sigma_a} = \frac{2{,}73}{2{,}74} = 1$$

قراءة t ستودنت من الجدول

اتخاذ القرار:

$$t_2^{0{,}05} = 4{,}303 > t_c = 1$$

بما أنّ $t^* = 1$ ستودنت الحسابية أقل من $t_4^{0.05} = 4{,}303$ ، فإنّ شكل السلسلة الزمنية تجميعي.