# الحصة 7 : التنبؤ باستخدام نماذج التلميس الأسي لهولت و لهولت-وينترز

## أهداف

1. استيعاب خصائص نموذج هولت المزدوج وتمييزه عن نموذج براون من حيث التقدير المباشر للمستوى $L_t$ والاتجاه $T_t$ بمعادلات تحديث.
2. فهم دور معاملي التلميس $\alpha$ و$\beta$ في التحكم بسرعة استجابة المستوى والاتجاه للتغيّرات الجديدة وتحليل حساسية النتائج لتغيّر قيمهما.
3. تطبيق نموذج هولت عملياً على بيانات واقعية ذات اتجاه دون موسمية واضحة وتفسير النتائج اقتصادياً وإدارياً (مثل قرارات الإنتاج والمخزون).
4. توسيع الفهم إلى نماذج هولت–وينترز بإدخال المكوّن الموسمي، التمييز بين النسخة الإضافية والجدائية، استخدام معادلات $L_t, T_t, S_t$ ومعاملات $\alpha, \beta, \gamma$، ثم مقارنة أداء هولت وهولت–وينترز لتبرير أهمية الموسمية في التنبؤ.

## تمرين 1

**س1: في نموذج التمهيد الأسي المزدوج (طريقة هولت)، ما الدور الأساسي لمعادلة الاتجاه $T_t$؟**

أ- تمثيل التقلبات العشوائية قصيرة الأجل في السلسلة الزمنية

ب-إزالة متوسط السلسلة الزمنية لجعلها ذات متوسط صفري

ت-التقاط الميل أو الاتجاه العام للسلسلة وتحديثه مع الزمن

ث-حساب المكون الموسمي الدوري في السلسلة الزمنية

**س2: في نموذج هولت للتنعيم الأسي، ما الهدف الأساسي من إدخال معادلة للميل (الاتجاه) إلى جانب معادلة المستوى؟**

أ- التعامل مع السلاسل الزمنية ذات الموسمية القوية

ب-تمثيل الاتجاه الخطي في السلسلة الزمنية وتحسين التنبؤ بالمستقبل

ت-زيادة وزن القيم القديمة مقارنة بالقيم الحديثة

ث-تقليل تأثير الضوضاء العشوائية قصيرة الأجل فقط

س3: أي من التالي يعبّر بصورة أفضل عن فكرة التنعيم في نماذج هولت وهولت-وينترز؟

أ- إهمال البيانات القديمة تمامًا والاكتفاء بآخر قيمة فقط

ب-الاعتماد الحصري على القيم المتوقعة سابقًا دون استخدام البيانات الحقيقية

ت-منح أوزان أكبر للمشاهدات الأحدث وأوزان أصغر تتناقص أسيًا للمشاهدات الأقدم

ث-حساب متوسط بسيط لكل القيم السابقة بالتساوي

## تمرين 2 التنبؤ باستخدام نموذج التلميس لهولت

لدينا بيانات ربع سنوية خلال الفترة من 2020-2022 والموضحة في الجدول التالي:

| الفترة | $y_t$ |
|---|---|
| 2020-T1 | 650,41 |
| 2020-T2 | 671,92 |
| 2020-T3 | 666,42 |
| 2020-T4 | 665,26 |
| 2021-T1 | 678,41 |
| 2021-T2 | 651,92 |
| 2021-T3 | 651,42 |
| 2021-T4 | 644,26 |
| 2022-T1 | 649,41 |
| 2022-T2 | 654,92 |
| 2022-T3 | 661,42 |
| 2022-T4 | 670,26 |

المطلوب: التنبؤ باستخدام نموذج هولت و نموذج هولت وينترز بالفصول الأربعة لسنة 2023.

ما هو النموذج الأفضل؟

تمرين 3

بيانات السلسلة الزمنية التالية هي للمبيعات الثلاثية في سنوات 2020، 2021، 2022 مع العلم أنها ذات شكل تجميعي، حدد القيم التنبئية لسنة 2023.

| Year | 2020 | | | | 2021 | | | | 2022 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Qtr | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Sales | 125 | 150 | 230 | 530 | 130 | 155 | 240 | 570 | 135 | 160 | 250 | 605 |

إذا علمت أن البيانات تتضمن موسمية مستقرة نافذتها 4، استخدم معاملات التمهيد 0,2، 0,1، 0,3 للقيام بتلميس هولت وينتر للنموذج التجميعي.

أحسب القيم المتوقعة للمبيعات في السنة 2023.

## تصحيح تمارين الحصة 7

**تمرين 1**

ج1: في نموذج التمهيد الأسي المزدوج (طريقة هولت)، الدور الأساسي لمعادلة الاتجاه $T_t$هو:

ج- التقاط الميل أو الاتجاه العام للسلسلة وتحديثه مع الزمن.

ج2: في نموذج هولت للتنعيم الأسي، الهدف الأساسي من إدخال معادلة للميل (الاتجاه) إلى جانب معادلة المستوى هو:

ج- تمثيل الاتجاه الخطي في السلسلة الزمنية وتحسين التنبؤ بالمستقبل.

ج3: العبارة التي تعبّر بصورة أفضل عن فكرة التنعيم في نماذج هولت وهولت-وينترز هي:

ج- منح أوزان أكبر للمشاهدات الأحدث وأوزان أصغر تتناقص أسيًا للمشاهدات الأقدم.

**تصحيح التمرين 2**

**نموذج Holt:** نموذج التلميس لهولت يتضمن معاملين: أحدهما للمتوسط الملسّ $a_{0t}$، والآخر للانحدار$a_{1t}$ . يتم إجراء تلميسين متميزين[1]:

-تلميس المتوسط $a_{0t}$مع معامل التلميس α، $\alpha \in [0;1]$ ؛

-تلميس الاتجاه $a_{1t}$ مع معامل التلميس β.، $\beta \in [0;1]$ .

في الحالة الخاصة أين $\alpha = \beta$ نموذج هولت يصبح تلميس أسي مزدوج لبراون.

صياغة النموذج:

تلميس المتوسط: $a_{0t} = \alpha x_t + (1-\alpha)(a_{0t-1} + a_{1t-1})$

[1] Régis Bourbonnais, Jean-Claude Usunier : »Prévision des ventes ; Théorie et pratique, 3e édition, Economica 2001

تلميس الاتجاه: $a_{1t} = \beta(a_{0t} - a_{0t-1}) + (1-\beta)a_{1t-1}$

التنبؤ المحسوب في t عند الأفق h فترة : $x_{t+h} = a_{0t} + ha_{1t}$ مع:

$x_t$ هي قيم المشاهدات للسلسلة في الفترة t.

القيم الابتدائي (من أجل t=1)

بالنسبة لمتوسط التلميس $a_{01} = x_1$ ، والاتجاه $a_{11} = 0$

$$\alpha = 0.3 \ , \quad \beta = 0.2$$

| | $y_t$ | $a_{0t}$ | $a_{1t}$ | التنبؤ |
|---|---|---|---|---|
| A1-01 | 650,41 | 650,41 | 0,00 | |
| A1-02 | 671,92 | 656,86 | 1,29 | 650,41 |
| A1-03 | 666,42 | 658,83 | 1,43 | 658,15 |
| A1-04 | 665,26 | 659,76 | 1,33 | 660,25 |
| A2-01 | 678,41 | 664,43 | 1,99 | 661,09 |
| A2-02 | 651,92 | 659,28 | 0,57 | 666,42 |
| A3-03 | 651,42 | 656,52 | -0,10 | 659,84 |
| A2-04 | 644,26 | 652,91 | -0,80 | 656,43 |
| A3-01 | 649,41 | 652,42 | -0,74 | 652,11 |
| A3-02 | 654,92 | 653,69 | -0,34 | 651,68 |
| A3-03 | 661,42 | 656,24 | 0,24 | 653,35 |
| A3-04 | 670,26 | 660,28 | 1,00 | 656,49 |
| 1 | | | | 661,28 |
| 2 | | | | 662,28 |
| 3 | | | | 663,28 |
| 4 | | | | 664,28 |

## نموذج -Holt-winters

$$\alpha = 0{,}3, \quad 1-\alpha = 0{,}7, \qquad \beta = 0{,}2 \qquad 1-\beta = 0{,}8$$

$$\gamma = 0{,}1 \qquad 1-\gamma = 0{,}9$$

| | yt |
|---|---|
| A1-01 | 728,00 |
| A1-02 | 916,00 |

| | |
|---|---|
| A1-03 | 776,00 |
| A1-04 | 848,00 |
| A2-01 | 760,00 |
| A2-02 | 736,00 |
| A3-03 | 671,00 |
| A2-04 | 689,00 |
| A3-01 | 567,00 |
| A3-02 | 760,00 |
| A3-03 | 736,00 |
| A4-04 | 978,00 |

**2-4-1صياغة النموذج:**

-تلميس المتوسط : $a_{0t} = \alpha\left(\frac{x_t}{S_{t-p}}\right) + (1-\alpha)(a_{0t-1} + a_{1t-1})$

-تلميس الاتجاه : $a_{1t} = \beta(a_{0t} - a_{0t-1}) + (1-\beta)a_{1t-1}$

تلميس الموسمية: تلميس الاتجاه: $S_t = \gamma\left(\frac{x_t}{a_{0t}}\right) + (1-\gamma)S_{t-p}$

التنبؤ في الأفق h فترة:

$$\hat{y}_{t+h} = (a_{0t} + ha_{1t})S_{t-p+h} \quad si\ 1 \leq h \leq p$$

$$\hat{y}_{t+h} = (a_{0t} + ha_{1t})S_{t-p+2h} \quad si\ p+1 \leq h \leq 2p$$

القيم الابتدائية:( بالنسبة للسنة الأولى، t=1, p=4 ).

**السلسلة الزمنية ذات شكل جدائي و هي تتأثر بالموسمية و الاتجاه:**

المعاملات الموسمية للسنة الأولى تُقَدّر بقسمة القيمة المشاهدة في t $(y_t)$ على المتوسط الحسابي $\bar{y}$ لـ p المشاهدات الأولى للسنة الأولى).

$$S_t = \frac{y_t}{\bar{y}} \quad , t = 1, p$$

-القيمة الابتدائية للتلميس المتوسط : $a_{0p} = \bar{y}$

--القيمة الابتدائية للاتجاه: $a_{1p} = 0$

مثال: نفس المثال السابق مع $\gamma = 0.1$

**الحل:**

$$\bar{y} = \frac{728 + 916 + 776 + 848}{4} = 817$$

$$S_1 = \frac{y_t}{\bar{y}} = \frac{728}{817} = 0{,}89, \qquad S_2 = \frac{916}{817} = 1{,}12, \qquad S_3 = \frac{776}{817} = 0{,}95\,,$$

$$S_4 = \frac{848}{817} = 1{,}04$$

| | $y_t$ | $a_{0t}$ | $a_{1t}$ | $S_t$ | التنبؤ |
|---|---|---|---|---|---|
| A1-01 | 728,00 | | | 0,89 | |
| A1-02 | 916,00 | | | 1,12 | |
| A1-03 | 776,00 | | | 0,95 | |
| A1-04 | 848,00 | 817,00 | 0,00 | 1,04 | |
| A2-01 | 760,00 | 827,77 | 2,15 | 0,89 | 728,00 |
| A2-02 | 736,00 | 776,38 | -8,56 | 1,10 | 930,49 |
| A3-03 | 671,00 | 756,91 | -10,74 | 0,94 | 729,29 |
| A2-04 | 689,00 | 722,99 | -15,37 | 1,03 | 774,48 |
| A3-01 | 567,00 | 688,89 | -19,12 | 0,89 | 632,45 |
| A3-02 | 760,00 | 678,01 | -17,47 | 1,11 | 739,34 |
| A3-03 | 736,00 | 695,25 | -10,53 | 0,95 | 623,21 |
| A3-04 | 978,00 | 759,45 | 4,42 | 1,06 | 704,89 |
| 1 | | | | | 677,32 |
| 2 | | | | | 849,39 |
| 3 | | | | | 737,94 |
| 4 | | | | | 820,09 |

$$a_{01} = \alpha\left(\frac{y_5}{S_1}\right) + (1-\alpha)(a_{00} + a_{10}) = 0{,}3\left(\frac{760}{0{,}89}\right) + 0{,}7(817 + 0) = 827{,}77$$

$$a_{11} = \beta(a_{01} - a_{00}) + (1-\beta)a_{10} = 0{,}2(827{,}77 - 817) + 0{,}8 \times 0 = 2{,}15$$

$$S_5 = \gamma\left(\frac{y_5}{a_{01}}\right) + (1-\gamma)S_1 = 0{,}1\left(\frac{760}{827{,}77}\right) + 0{,}9 \times 0{,}89 = 0{,}89$$

$$\hat{y}_1 = (817 + 0) \times 0{,}89 = 728$$

.

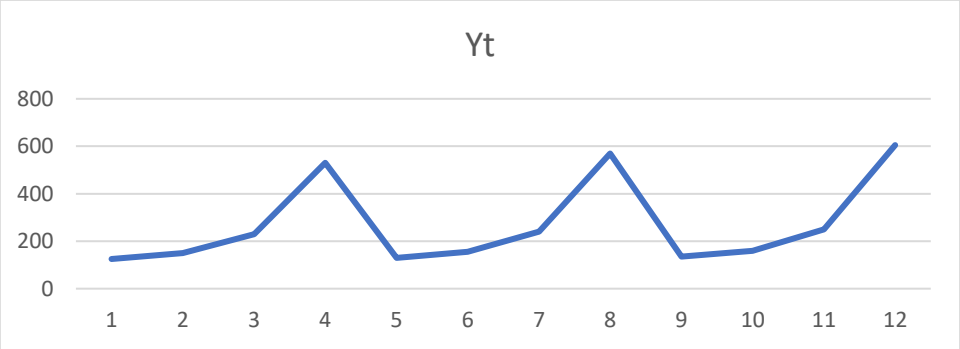
$$\hat{y}_9 = (759{,}45 + 4{,}42 \times 1) \times 0{,}89 = 677{,}31$$

$$\hat{y}_{10} = (759{,}45 + 4{,}42 \times 2) \times 1{,}11 = 849{,}39$$

**السلسلة الزمنية ذات شكل تجميعي و هي تتأثر بالموسمية و الاتجاه:**

الحل:

1. تحديد النموذج من خلال الرسم:




يُبيّن الرسم البياني أن التلميس الأسي البسيط غير ملائم لتلميس هذه السلسلة الزمنية بسبب وجود كلٍّ من الاتجاه العام والموسمية، كما أن التلميس الأسي المضاعف لا يناسبها أيضًا لوجود مكوّن موسمي واضح. وبالتالي يكون النموذج الأنسب هو نموذج هولت-وينترز، ومع استقرار الموسمية يمكن اعتماد الصيغة التجميعية، مع كون طول الدورة الموسمية وفقًا للرسم يساوي $p = 4$.

2. نحسب معاملات الموسمية الأربع ثم $a_{0p}$ ثم:$a_{1p}$

$$\bar{y} = \frac{(125 + 150 + 230 + 530)}{4} = 258{,}75$$

$$S_1 = y_1 - \bar{y} = 125 - 258{,}75 = -133{,}75$$
$$S_2 = y_2 - \bar{y} = 150 - 258{,}75 = -108{,}75$$
$$S_3 = y_3 - \bar{y} = 230 - 258{,}75 = -28{,}75$$
$$S_4 = y_4 - \bar{y} = 530 - 258{,}75 = 271{,}25$$

$$a_{04} = y_4 - S_4 = 530 - 271{,}25 = 258{,}75$$
$$a_{14} = 0$$
$$\alpha = 0{,}2, \quad 1 - \alpha = 0{,}8, \qquad \beta = 0{,}1 \quad 1 - \beta = 0{,}9$$
$$\gamma = 0{,}3 \qquad 1 - \gamma = 0{,}7$$

3- التلميس والتنبؤ باستخدام المعادلات لحساب $a_{0t}$، $a_{1t}$، $S_t$،

$\hat{y_t}(h) = (a_{0t} + h\, a_{1t}) + S_{4+1-4}$

$\hat{y_4}(1) = (258{,}75 + 1 \times 0) + (-133{,}75) = 115$

$a_{05} = 0.2(y_5 - S_{5-4}) + 0.8(a_{05-1} + a_{15-1}) = 0.2(130 - (-133.75)) + 0.8(258{,}75 + 0) = 259{,}75$

$a_{15} = \beta(a_{05} - a_{05-1}) + (1 - \beta)\, a_{15-1}$

$a_{15} = 0{,}1(259{,}75 - 258{,}75) + 0{,}9 * 0 = 0{,}1$

$S_5 = 0.6(y_5 - a_{05}) + 0.4S_{5-4} = 0.3(130\text{-}259{,}75) + 0.7(-133.75) = -132{,}55$

$\hat{y_5}(1) = (248{,}75 + 1 * 0) + (-133{,}75) = 125$

| $t$ | $y_t$ | $a_{0t}$ | $a_{1t}$ | $S_t$ | التنبؤ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 125 | | | -133,75 | |
| 2 | 150 | | | -98,75 | |
| 3 | 230 | | | -18,75 | |
| 4 | 530 | 258,75 | 0,00 | 281,25 | |
| 1 | 130 | 259,75 | 0,10 | -132,55 | 125,00 |
| 2 | 155 | 258,63 | -0,02 | -100,21 | 161,10 |
| 3 | 240 | 258,64 | -0,02 | -18,72 | 239,86 |
| 4 | 570 | 264,64 | 0,58 | 288,48 | 539,87 |
| 1 | 135 | 265,69 | 0,63 | -131,99 | 132,68 |
| 2 | 160 | 265,10 | 0,51 | -101,68 | 166,11 |
| 3 | 250 | 266,23 | 0,57 | -17,97 | 246,89 |
| 4 | 605 | 276,74 | 1,56 | 300,41 | 555,28 |
| 1 | | | | | 146,31 |
| 2 | | | | | 178,18 |
| 3 | | | | | 263,45 |
| 4 | | | | | 583,39 |